سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040
Oman Vision

نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي
المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من
مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف الحادي عشر - من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 -
للمؤلف سو بمبرتن.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

جميع الحقوق محفوظة

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ولا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزّأً أو ترجمته

أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال

إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.

المغفور له

السلطان قابوس بن سعيد

-طيّب الله ثراه-

حضرة صاحب الجلالة

السلطان هيثم بن طارق المعظم

-حفظه الله ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلًا مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة التاسعة: مفكوك ذات الحدّين

المقدمة

يُعدّ فهم علم الرياضيات والقدرة على العمل به مهارة حياتية مهمة، إضافة إلى أن كثيرًا من الوظائف تتطلب فهمًا رياضيًّا جيدًا. فكلنا نستخدم علم الرياضيات في أساسيات حياتنا اليومية، حيث إننا نستخدم معرفتنا الرياضية في تحديد الميزانية عندما نخطط لعطلة، وفي تصميم غرفتنا لمعرفة حاجتها إلى الطلاء لطلائها، أو حتى عند تعديل وصفة طبخ لتكفي عددًا أكبر من الأشخاص.

إضافة إلى هذه المهارات الحياتية، يساعد علم الرياضيات الفرد على تطوير منهجية خاصة للتفكير، بما في ذلك تطوير مهاراته في حل المسألة ومهاراته في أي عمل آخر يقوم به.

من المحتمل ألّا يكون لديك فهم واضح لماهية 'المسألة الرياضية'. إنها إشكالية جديرة بالاهتمام، وكثير من الناس حاروا في شأنها. وقد ترغب في أن يكون لك رأي خاص حول هذه الإشكالية، التي ستشهد على تطورها مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي عبارة عن سؤال رياضي لا تعرف إجابته مباشرة، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا لحلها، وقد تضطر إلى تجريب أساليب وأفكار متعددة، بمفردك أو بالتشارك مع الآخرين، حتى تتوصل إلى طريقة حلها.

سيساعدك هذا الكتاب في تعلم مبادئ الرياضيات اللازمة لإجراء الاختبارات وتطوير مهاراتك في حلّ المسألة وفي حل مسائل تتعلق بمواقف من الحياة اليومية.

وحيث إنك تعوّدت على التواصل مع الآخرين سواء مشافهة أو كتابة أو رسمًا، فإنك من خلال دراسة هذا الكتاب ستتمكن من التواصل باستخدام الرياضيات. وهذا يعني عرض الحلول بخطوات واضحة بحيث يتمكن أيّ شخص آخر من متابعة هذه الحلول، أو مناقشة هذه الأفكار الرياضية مع زملائه. إن استكشاف المسائل ومناقشتها بالشراكة مع الآخرين سيساعدك على تطوير إدراكك، كما أن مناقشة تسلسل أفكارك وتوضيحها سيساعدك ويساعد زملاءك على تطوير مهارة الإقناع بالحجة والبرهان للمسائل.

إضافة إلى ذلك يمكن النظر إلى التمثيل الرياضي كعبارة عن التقاء الرياضيات بالعالم الحقيقي، حيث تسمح لنا هذه التمثيلات الرياضية بالتوقع وبفهم أفضل للواقع. إن تمثيل ظواهر الحياة اليومية باستخدام الجبر يساعدنا على القيام بتوقعات وعلى مقارنتها بالنتائج الواقعية، ومن ثم تحسين هذه التمثيلات. فقد تتوقع مثلًا أنك ستنفق ٢٥ ريالًا عُمانيّا في يوم عطلتك، هذا يعني أنه في وقت مقداره ن يوم، ستنفقّ ٢٥ن ريالًا عُمانيّا. بعد أيام قليلة يمكنك أن تقارن ما أنفقته فعلًا بهذا العدد، وتعدّل تمثيلك بناء عليه. إن الأمثلة الشائعة الشائعة في التمثيل الرياضي تتضمن التوقعات الجوية، والتغير المناخي، والتغير الديموغرافي (السكاني)، والأسواق المالية وغيرها.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- نشاطات استكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بتوسيع أفكار زميله وإثرائها، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات

صغيرة، ثم مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.

- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★'، '★' أو '★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'التمثيل' أو 'حل المسائل'، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين، وقد تتضمن هذه التمارين العديد من التطبيقات الحياتية اليومية مثل التي يمكن أن تواجهها في حياتك الواقعية، وهنا تكمن ضرورة الرياضيات، حيث تحتاج إلى حل تمارين تتعلق بالأمور المالية والتجارية والارتفاعات وغيرها.
- التمارين المتنوعة الكثيرة التي تساعد الطلبة على تكرار الأهداف المعروضة في الدرس، وقد جاءت هذه التمارين في معظم الأحيان متدرجة من السهل إلى الصعب حيث يستطيع الطالب امتلاك المفهوم في بدايتها، ثم يقوم بالتحليلات الرياضية المطلوبة عند الانتهاء منها.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). فهي الطريقة التي يكتب بها علماء الرياضيات معلوماتهم. ستواجه تحديات (أسئلة غير مألوفة) فإذا كنت متعوّدًا على أن تكون نشطًا في الرياضيات، فستكون لديك فرصة أفضل لتصبح قادرًا على التعامل مع هذه التحديات بنجاح.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن تصفّحها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون بداية في هذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٦-١ تحوّل بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ذات الأساس العام 'أ'.
٦-٢ تحوّل بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ذات الأساس ١٠.
٦-٣ تبسّط اللوغاريتمات ذات الأساس المتشابه وتوجد قيمتها باستخدام قوانين اللوغاريتمات.
٦-٤ تحل المعادلات اللوغاريتمية.
٦-٥ تحل المعادلات الأسية (فقط تلك التي تتحول إلى معادلات خطية).
٦-٦ تستخدم المعادلات اللوغاريتمية والأسية كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية وتفسرها.

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

- تكتب رتبة المصفوفة التي فيها ص صفًا، ع عمودًا في صورة ص × ع
- المصفوفة الصفية: تتكون من صف واحد وأي عدد من الأعمدة.
- المصفوفة العمودية: تتكون من عمود واحد وأي عدد من الصفوف.

نتيجة: مربعات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

مثلث باسكال

المفردات الأساسية: هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

١) تناقش مع أحد زملائك في الصف حول المصفوفات الآتية التي يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح عليها والتي لا يمكن إجراء ذلك:

أ $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

استكشف: تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم).

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة السادسة	تفكّ الأقواس وتبسّط العبارات الجبرية.	١) فكّ الأقواس وبسّط: أ (٢س + ٣)^{٢} ب (١ − ٣س)(١ + ٢س − ٣س^{٢})
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تبسّط الأسس.	٢) بسّط: أ (٥س^{٢})^{٣} ب (−٢س^{٣})^{٥}

المفردات

مثلث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدّين
binomial theorem

معرفة قبلية: تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثــال ٥

باستخدام المصفوفات المعطاة:

أ = $\begin{pmatrix} ٩ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ج = $\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ٢ & ٧ \end{pmatrix}$ د = $\begin{pmatrix} ٠ & -٦ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجِد:

أ أ + ب

ب ب + أ

ج ج + د

د ج − د

هـ أ + ج

الحــلّ:

أ أ + ب = $\begin{pmatrix} ٩ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٣ & ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ + (-٣) & ٥ + ١ & ٤ + ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

ب ب + أ = $\begin{pmatrix} -٣ & ١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٩ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ + ٩ & ١ + ٥ & ٣ + ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

لاحظ أن إجابتَي أ + ب ، ب + أ متساويتان، أي أن أ + ب = ب + أ

أمثلة: تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن حلًا تم تنفيذه بالكامل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

عندما يتم إيجاد مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$، حيث أ قيمة عددية، يكون أي حد ثابت حدًا خاليًا من س في المثال ١، الحد الثابت هو ١، وهو حد خالٍ من س

مساعدة: مربعات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

يوجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم تشفير هذه الأسئلة كالآتي:

- تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- تركز هذه الأسئلة على التمثيل.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

$\text{أ} > ٠$، $\text{س} > ٠$، $\text{ص} > ٠$، و $\text{أ} \neq ٠$:

التحويل ما بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية

إذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$، فإن $\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

قوانين اللوغاريتمات

للقيم الموجبة لـ س، ص:

قانون الضرب: $\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س ص}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

قانون القسمة: $\text{لو}_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$

قانون القوة: $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

$\text{لو}_{\text{أ}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{-١} = -\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة

١) أوجد أول أربعة حدود في مفكوك $(٢ + \text{س})^{٦}$ مرتبة تصاعديًا بحسب قوى س

٢) أوجد أول ثلاثة حدود مرتبة تنازليًا بحسب قوى س في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{٦}$

٣) أوجد معامل $\text{س}^{٣}$ في مفكوك $\left(١ - \frac{\text{س}}{٢}\right)^{١٢}$

٤) أوجد أول أربعة حدود في مفكوك $(٢ + \text{س}^{٢})^{٦}$ مرتبة تصاعديًا بحسب قوى س

٥) اكتب أول ثلاثة حدود في مفكوك $(٣ + ٢\text{س})^{٦}$ مرتّبة تصاعديًا بحسب قوى س، واكتب كلّ حدّ في أبسط صورة.

٦) في مفكوك $(\text{أ} + ٢\text{س})^{٦}$ معامل س يساوي معامل $\text{س}^{٢}$، أوجد قيمة الثابت أ

٧) في مفكوك $(٢ + \text{أس})^{٧}$، حيث أ عدد ثابت، معامل س هو -٢٢٤٠؛ أوجد معامل $\text{س}^{٢}$

٨) أوجد أول ثلاثة حدود في مفكوك $(١ + \text{ل س})^{٨}$ مرتّبة تصاعديًا بحسب قوى س

٩) أوجد الحدود الثلاثة الأولى مرتبة تصاعديًا بحسب قوى س في مفكوك:

أ $(١ + ٢\text{س})^{٥}$

ب $(٣ - \text{س})^{٥}$

الوحدة السادسة
الأسس واللوغاريتمات
Exponents and logarithms

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٦-١ تحوّل بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ذات الأساس العام 'أ'.

٦-٢ تحوّل بين الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية ذات الأساس ١٠.

٦-٣ تبسّط اللوغاريتمات ذات الأساس المتشابه وتوجد قيمتها باستخدام قوانين اللوغاريتمات.

٦-٤ تحل المعادلات اللوغاريتمية.

٦-٥ تحل المعادلات الأسية (فقط تلك التي تتحول إلى معادلات خطية).

٦-٦ تستخدم المعادلات اللوغاريتمية والأسية كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية وتفسرها.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تستخدم وتفسّر القوى الموجبة والسالبة والكسرية والصفرية	١) أوجد القيمة أ $٥^{-٢}$ ب $٨^{\frac{٢}{٣}}$ ج $٧^{٠}$
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تستخدم قوانين القوى	٢) حل $٣٢^{س} = ٢$ ٣) بسّط أ $\frac{١}{٢}س^{-٢} \times ٦س^{٥}$ ب $٨س^{٥} \div ٢س^{-٢}$ ج $(٤س^{-٨})^{\frac{١}{٢}} \times س^{٤}$

المفردات

الأسّ exponent

الأساس base

الدوال اللوغاريتمية logarithmic functions

الدوال الأسية exponential functions

اللوغاريتم logarithm

لماذا ندرس اللوغاريتمات؟

في القرن السادس عشر تعمق الرياضيون من بلدان مختلفة في موضوع اللوغاريتمات، وقد تمّ تقديمها على شكل قوائم عددية في جدول.

ثم عملوا على تطويرها للمساعدة في حل الحسابات الطويلة التي تتضمن الضرب والقسمة (وإيجاد الجذر) باستخدام الجمع والطرح فقط.

هنا جزء من جدول لوغاريتمات.

	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	الفارق الوسطي								
											١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٠	٠٠٠٠	٠٠٤٣	٠٠٨٦	٠١٢٨	٠١٧٠	٠٢١٢	٠٢٥٣	٠٢٩٤	٠٣٣٤	٠٣٧٤	٤	٨	١٢	١٧	٢١	٢٥	٢٩	٣٣	٣٧
١١	٠٤١٤	٠٤٥٣	٠٤٩٢	٠٥٣١	٠٥٦٩	٠٦٠٧	٠٦٤٥	٠٦٨٢	٠٧١٩	٠٧٥٥	٤	٨	١١	١٥	١٩	٢٣	٢٦	٣٠	٣٤
١٢	٠٧٩٢	٠٨٢٨	٠٨٦٤	٠٨٩٩	٠٩٣٤	٠٩٦٩	١٠٠٤	١٠٣٨	١٠٧٢	١١٠٦	٣	٧	١٠	١٤	١٧	٢١	٢٤	٢٨	٣١
١٣	١١٣٩	١١٧٣	١٢٠٦	١٢٣٩	١٢٧١	١٣٠٣	١٣٣٥	١٣٦٧	١٣٩٩	١٤٣٠	٣	٦	١٠	١٣	١٦	١٩	٢٣	٢٦	٢٩
١٤	١٤٦١	١٤٩٢	١٥٢٣	١٥٥٣	١٥٨٤	١٦١٤	١٦٤٤	١٦٧٣	١٧٠٣	١٧٣٢	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	٢٤	٢٧
١٥	١٧٦١	١٧٩٠	١٨١٨	١٨٤٧	١٨٧٥	١٩٠٣	١٩٣١	١٩٥٩	١٩٨٧	٢٠١٤	٣	٦	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٢	٢٥
١٦	٢٠٤١	٢٠٦٨	٢٠٩٥	٢١٢٢	٢١٤٨	٢١٧٥	٢٢٠١	٢٢٢٧	٢٢٥٣	٢٢٧٩	٣	٥	٨	١١	١٣	١٦	١٨	٢١	٢٤
١٧	٢٣٠٤	٢٣٣٠	٢٣٥٥	٢٣٨٠	٢٤٠٥	٢٤٣٠	٢٤٥٥	٢٤٨٠	٢٥٠٤	٢٥٢٩	٢	٥	٧	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠	٢٢
١٨	٢٥٥٣	٢٥٧٧	٢٦٠١	٢٦٢٥	٢٦٤٨	٢٦٧٢	٢٦٩٥	٢٧١٨	٢٧٤٢	٢٧٦٥	٢	٥	٧	٩	١٢	١٤	١٦	١٩	٢١
١٩	٢٧٨٨	٢٨١٠	٢٨٣٣	٢٨٥٦	٢٨٧٨	٢٩٠٠	٢٩٢٣	٢٩٤٥	٢٩٦٧	٢٩٨٩	٢	٤	٧	٩	١١	١٣	١٦	١٨	٢٠
٢٠	٣٠١٠	٣٠٣٢	٣٠٥٤	٣٠٧٥	٣٠٩٦	٣١١٨	٣١٣٩	٣١٦٠	٣١٨١	٣٢٠١	٢	٤	٦	٨	١١	١٣	١٥	١٧	١٩
٢١	٣٢٢٢	٣٢٤٣	٣٢٦٣	٣٢٨٤	٣٣٠٤	٣٣٢٤	٣٣٤٥	٣٣٦٥	٣٣٨٥	٣٤٠٤	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
٢٢	٣٤٢٤	٣٤٤٤	٣٤٦٤	٣٤٨٣	٣٥٠٢	٣٥٢٢	٣٥٤١	٣٥٦٠	٣٥٧٩	٣٥٩٨	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧
٢٣	٣٦١٧	٣٦٣٦	٣٦٥٥	٣٦٧٤	٣٦٩٢	٣٧١١	٣٧٢٩	٣٧٤٧	٣٧٦٦	٣٧٨٤	٢	٤	٦	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٢٤	٣٨٠٢	٣٨٢٠	٣٨٣٨	٣٨٥٦	٣٨٧٤	٣٨٩٢	٣٩٠٩	٣٩٢٧	٣٩٤٥	٣٩٦٢	٢	٤	٥	٧	٩	١١	١٢	١٤	١٦
٢٥	٣٩٧٩	٣٩٩٧	٤٠١٤	٤٠٣١	٤٠٤٨	٤٠٦٥	٤٠٨٢	٤٠٩٩	٤١١٦	٤١٣٣	٢	٣	٥	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥
٢٦	٤١٥٠	٤١٦٦	٤١٨٣	٤٢٠٠	٤٢١٦	٤٢٣٢	٤٢٤٩	٤٢٦٥	٤٢٨١	٤٢٩٨	٢	٣	٥	٧	٨	١٠	١١	١٣	١٥
٢٧	٤٣١٤	٤٣٣٠	٤٣٤٦	٤٣٦٢	٤٣٧٨	٤٣٩٣	٤٤٠٩	٤٤٢٥	٤٤٤٠	٤٤٥٦	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٣	١٤
٢٨	٤٤٧٢	٤٤٨٧	٤٥٠٢	٤٥١٨	٤٥٣٣	٤٥٤٨	٤٥٦٤	٤٥٧٩	٤٥٩٤	٤٦٠٩	٢	٣	٥	٦	٨	٩	١١	١٢	١٤
٢٩	٤٦٢٤	٤٦٣٩	٤٦٥٤	٤٦٦٩	٤٦٨٣	٤٦٩٨	٤٧١٣	٤٧٢٨	٤٧٤٢	٤٧٥٧	١	٣	٤	٦	٧	٩	١٠	١٢	١٣

استخدم الفلكيون اللوغاريتمات لدراسة الكواكب والنجوم، واستخدمها البحارة للإبحار، حيث كانت المسافات التي يواجهونها في حساباتهم كبيرة جدًا، وكان عليهم من دون الاستعانة بالحاسبة، أن يضمّنوا في إجاباتهم أعدادًا كأصغر وأكبر مسافة بين الأرض والشمس والتي بلغت في أحد الأعوام ١٤٧٠٩٨٩٢٥، ١٥٢٠٩٣٢٥١ كم.

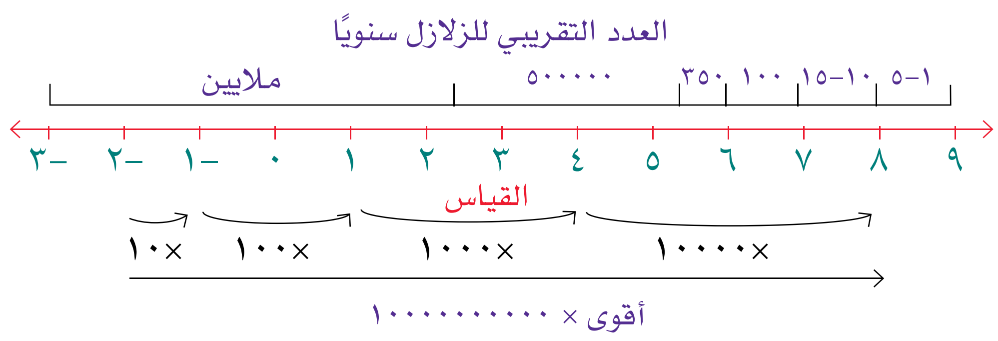
ولم نعد بحاجة إلى استخدام جداول اللوغاريتمات لأن كل المعلومات مخزنة في الحاسبة.

للوغاريتمات عدد كبير من التطبيقات الواقعية، فهي تستخدم بشكل خاص لصنع موازين القياس حيث تكون القيمة الكبرى في البيانات أكبر بكثير من القيمة الصغرى فيها، مثل الفرق بين ١٠٠ و ١٠ ملايين، أو بين ٠,٠٠٠٠٠٠١ و ١٠٠٠. في هذه الحالات، تسهل اللوغاريتمات استخدام هذه البيانات. ومن الأمثلة على تطبيقات اللوغاريتم مقياس درجة العزم (Moment magnitude scale) ومقياس ريختر (Richter scale)، وهما مقياسان لقياس قوة الزلازل، ومن الأمثلة أيضًا على استخدام اللوغاريتمات مقياس ديسيبل لقياس قوة الصوت، ومقياس PH لقياس درجة الأسيد والألكالاين في المحاليل.

تحدث كل عام ملايين الزلازل على وجه الأرض، ولكن معظمها ضعيف لدرجة أننا لا نشعر بها. إلّا أنه غالبًا ما يحصل ما بين ١٠ إلى ١٥ زلزالًا قويًا كل عام، يمكنها أن تكون أقوى بمئات بل بآلاف المرات من الزلازل الصغيرة التي لا نشعر بها.

زلزال مقياسه ٦ أقوى بعشر مرات من زلزال مقياسه ٥، وهذا بدوره أقوى بعشر مرات من زلزال مقياسه ٤، وهكذا.

يبيّن المخطط أدناه هذه المعلومات باستخدام مقياس درجة العزم اللوغاريتمي لقياس قوة الزلازل.



٦-١ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية

الأسّ exponent هو القوة.

يمكن أن يكون الأسّ عددًا صحيحًا موجبًا أو سالبًا أو كسرًا أو صفرًا.

وهو القيمة التي نرفع إليها **الأساس base** (العدد).

لقد درست بالفعل القوى وتعلمت أن:

$$٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

$$٣^{-٢} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٣ \times ٣} = \frac{١}{٩}$$

$$(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٢} \times ٢^{٢} \times ٢^{٢} = ٢^{٦}$$

$$٣^{٢} \times ٣^{٣} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^{٥}$$

$$٢^{٥} \div ٢^{٣} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}{٢ \times ٢ \times ٢} = ٢^{٢}$$

مُساعَدة

تذكّر أن:

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$ $س^{٠} = ١$

$س^{م} \div س^{ن} = س^{م-ن}$ $س^{١} = س$

$(س^{م})^{ن} = س^{مν}$ $س^{-أ} = \frac{١}{س^{أ}}$

$أ^{س} = أ^{ص}$ ، $\therefore$ س = ص

عندما نعبّر عن متغير على شكل عدد مرفوع إلى قوة لمتغير آخر، مثل ص = $أ^{س}$، فإننا نسمي هذا التعبير معادلة أسّية.

يمكن كتابة المعادلة الأسية ص = $أ^{س}$ في الصيغة اللوغاريتمية.

اللوغاريتم logarithm هو القوة أو الأس (س) الذي نرفع إليه عدد آخر (أ) بحيث ص = $أ^{س}$ ونسمي (أ) أساس اللوغاريتم.

في الصيغة اللوغاريتيمة للمعادلة ص = $أ^{س}$ ، س هو القوة التي يجب أن نرفع إليها العدد أ لنحصل على القيمة ص

الصيغة اللوغاريتمية للمعادلة ص = $أ^{س}$ هي س = $لـو_{أ}$ ص

الصيغة الأسية	الصيغة اللوغاريتمية
ص = $أ^{س}$ (ص: العدد، س: أس، أ: الأساس)	س = $لـو_{أ}$ ص (س: أس، ص: العدد، أ: الأساس)

مُساعَدة

س = $لـو_{أ}$ ص تقرأ على الشكل: س = لوغاريتم ص للأساس أ

نعلم أن:

$٩ = ٣^{٢}$ ، $\therefore$ ٢ = $لـو_{٣}$ ٩ لأن ٢ هي القوة التي يجب أن نرفع إليها ٣ لنحصل على ٩

$٦٤ = ٤^{٣}$ ، $\therefore$ ٣ = $لـو_{٤}$ ٦٤ لأن ٣ هي القوة التي يجب أن نرفع إليها ٤ لنحصل على ٦٤

$\frac{١}{٢٥} = ٥^{-٢}$ ، $\therefore$ $لـو_{٥} \frac{١}{٢٥} = -٢$ لأن ‎−٢ هي القوة التي يجب أن نرفع إليها ٥ لنحصل على $\frac{١}{٢٥}$

نتيجة ١

لكل أساس أ $>$ ٠، أ $\neq$ ١:

- إذا كان ص = أ$^{\text{س}}$، فإن س = لـو$_{\text{أ}}$ ص
- إذا كان أ^{١} = أ، فإن لـو$_{\text{أ}}$ أ = ١
- إذا كان أ^{٠} = ١، فإن لـو$_{\text{أ}}$ ١ = ٠
- لـو$_{\text{أ}}$ أ$^{\text{س}}$ = س
- لـو$_{\text{أ}}$ $\frac{١}{\text{أ}}$ = لـو$_{\text{أ}}$ أ$^{-١}$ = -١

لكل أ، س، ص $>$ ٠، أ $\neq$ ١:

- أ$^{\text{لـو}_{\text{أ}}\text{س}}$ = س
- إذا كان لـو$_{\text{أ}}$ س = لـو$_{\text{أ}}$ ص، فإن س = ص

في النتيجة ١، يبيّن لنا الشرطان أ $>$ ٠، أ $\neq$ ١ أن هناك أعدادًا لا يمكن أن تكون أساسًا للوغاريتمات:

- لا يمكن أن يكون أساس اللوغاريتم عددًا سالبًا.
- لا يمكن أن يكون أساس اللوغاريتم صفرًا أو واحدًا.
- لا يوجد لوغاريتمات لأعداد سالبة أو للصفر.

استكشف ١

يريد طارق أن يوجِد لوغاريتمات العدد ٨ باستخدام أساسات مختلفة، فوضع الجدول الآتي:

لـو$_{\text{س}}$ ٨	لـو$_{-٢}$ ٨	لـو$_{٠}$ ٨	لـو$_{٠,٥}$ ٨	لـو$_{١}$ ٨	لـو$_{٢}$ ٨	لـو$_{\sqrt{٨}}$ ٨	لـو$_{٣}$ ٨	لـو$_{٤}$ ٨	لـو$_{٥}$ ٨
القيمة	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط

أ يستطيع طارق لأول وهلة أن يتبيّن بدقة قيم ج، هـ، و.
ناقش ما تتضمّنه هذه القيم، وقدرة طارق على معالجتها على هذا النحو.

ب هل يمكنك إيجاد قيمتَين أخريَين من أ إلى هـ ووضعهما في الجدول؟ فسّر ذلك.

ج ثمّة ثلاث قيم من أ إلى ط لا وجود لها أصلًا. ما هي هذه القيم؟
ناقش مع زميل لك إجابتك عن هذا السؤال.

مثــال ١

حوّل $٤^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ إلى الصيغة اللوغاريتمية.

الحــلّ:

حدد الأساس والأسّ والعدد الذي ينبغي أن نجد لوغاريتمه.

الصيغة الأسية — الصيغة اللوغاريتمية

أس

$$\underbrace{٤}_{\text{الأساس}}^{\frac{٣}{٢}} = \underbrace{٨}_{\text{العدد}} \longrightarrow \text{لـو}_{\underbrace{٤}_{\text{الأساس}}} \overbrace{٨}^{\text{العدد}} = \overbrace{\frac{٣}{٢}}^{\text{لوغاريتم}}$$

يمكننا أيضًا أن نستخدم اللوغاريتم للأساس ٤ لكلا الطرفَين.

$\text{لـو}_{٤}\, ٤^{\frac{٣}{٢}} = \text{لـو}_{٤}\, ٨$ — استخدم حقيقة أن $\text{لو}_{أ}\, أ^{س} = س$

$\frac{٣}{٢} = \text{لـو}_{٤}\, ٨$

$\text{لـو}_{٤}\, ٨ = \frac{٣}{٢}$

مثــال ٢

حوّل الآتي إلى الصيغة الأسية:

أ $\text{لـو}_{١٠}\, (س - ١) = -٢$

ب $\text{لـو}_{٣}\, \frac{١}{٩} = س$

الحــلّ:

أ $\text{لـو}_{١٠}\, (س - ١) = -٢$ — الأساس = ١٠، الأس = −٢

$١٠^{-٢} = س - ١$

ب $\text{لـو}_{٣}\, \frac{١}{٩} = س$ — الأساس = ٣، الأس = س

$٣^{س} = \frac{١}{٩}$

مثــال ٣

أوجد:

أ) $\text{لـو}_{٥}\ ٦٢٥$

ب) $\text{لـو}_{\text{ل}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{ل}^{٢}}}{\sqrt{\text{ل}^{٣}}}$

الحــلّ:

أ) $\text{لـو}_{٥}\ ٦٢٥ = \text{لـو}_{٥}\ ٥^{٤}$ — اكتب ٦٢٥ باستخدام الأساس ٥ وباستخدم $\text{لـو}_{\text{أ}}\ \text{أ}^{\text{س}} = \text{س}$

$= ٤$

ب) $\text{لـو}_{\text{ل}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{ل}^{٢}}}{\sqrt{\text{ل}^{٣}}} = \text{لـو}_{\text{ل}} \dfrac{\text{ل}^{\frac{٢}{٣}}}{\text{ل}^{\frac{٣}{٢}}}$ — بسّط القوى

$= \text{لـو}_{\text{ل}}\ \text{ل}^{\frac{٢}{٣} - \frac{٣}{٢}}$

$= \text{لـو}_{\text{ل}}\ \text{ل}^{-\frac{٥}{٦}}$ — استخدم $\text{لـو}_{\text{أ}}\ \text{أ}^{\text{س}} = \text{س}$

$= -\dfrac{٥}{٦}$

مُساعَدة

$\sqrt[\text{م}]{\text{ل}^{\text{ن}}} = (\text{ل}^{\text{ن}})^{\frac{١}{\text{م}}} = \text{ل}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

مثــال ٤

إذا علمت أن $\text{لـو}_{٢}\ ١١ \approx ٣{,}٤٦$ فأوجد قيمة $\text{لـو}_{٢}\ ١٢١$ التقريبية.

الحــلّ:

$\text{لـو}_{٢}\ ١١ \approx ٣{,}٤٦ \Leftrightarrow ١١ = ٢^{٣{,}٤٦}$

$١٢١ = ١١^{٢} = (٢^{٣{,}٤٦})^{٢} = ٢^{٣{,}٤٦ \times ٢} = ٢^{٦{,}٩٢}$

$\therefore\ \text{لـو}_{٢}\ ١٢١ \approx ٦{,}٩٢$

مثــال ٥

اكتب: $\text{لـو}_{٤}\left(\frac{٣}{٤}\text{س} + ١\right) = ٣$ في الصيغة الأسية.

الحــلّ:

$\text{لـو}_{٤}\left(\frac{٣}{٤}\text{س} + ١\right) = ٣$ — الأساس = ٤، الأس = ٣

$٤^{٣} = \frac{٣}{٤}\text{س} + ١$

تمارين ٦-١

١) حوّل كلًّا من الآتي من الصيغة الأسّية إلى الصيغة اللوغاريتمية:

أ $٤^{٣} = ٦٤$ ب $١٠^{٤} = ١٠٠٠٠$ ج $٣^{٧} = ٢١٨٧$

د $١٦^{\frac{١}{٢}} = ٤$ هـ $٢^{-٥} = \frac{١}{٣٢}$ و $٨^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

٢) حوّل كلًّا من الآتي من الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسّية:

أ $\text{لـو}_{٧}\ ٤٩ = ٢$ ب $\text{لـو}_{١٠}\ ٠,١ = -١$ ج $\text{لـو}_{٢}\ ٦٤ = ٦$

د $\text{لـو}_{٢٧}\ ٣ = \frac{١}{٣}$ هـ $\text{لـو}_{٤}\ ٨ = ١,٥$ و $\text{لـو}_{٨}\ \frac{١}{٤} = -\frac{٢}{٣}$

٣) حدّد ما إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة:

أ $\text{لـو}_{٤}\ ١٦ = ٢$ ب $\text{لـو}_{٢}\ ٢٠ = ١٠$ ج $\text{لـو}_{٢}\ ١٦ = ٤$

د $\text{لـو}_{٧}\ ٤٩ = ٢$ هـ $\text{لـو}_{١٦}\ ٤ = ٢$ و $\text{لـو}_{٦}\ ٣٦ = \frac{١}{٢}$

ز $\text{لـو}_{١٢٥}\ ٥ = \frac{١}{٣}$ ح $\text{لـو}_{١٠}\ \frac{١}{١٠٠} = -٢$ ط $\text{لـو}_{٩}\ ٢٧ = \frac{٣}{٢}$

ي $\text{لـو}_{٦٤}\ ١٦ = -\frac{٢}{٣}$ ك $\text{لـو}_{٢}\ \frac{١}{٨} = -٣$ ل $\text{لـو}_{٢}\ ٠,٢٥ = -٢$

٤) أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ $\text{لـو}_{٣}\ ٢٧$ ب $\text{لـو}_{٥}\ ٢٥$ ج $\text{لـو}_{٧}\ \frac{١}{٧}$

د $\text{لـو}_{١٠٠}\ ١٠$ هـ $\text{لـو}_{٠,٥}\ ٨$ و $\text{لـو}_{٨}\ \frac{١}{٢}$

٥) أكمل الجدول الآتي:

الصيغة الأسية	$٢^{٤} = ١٦$		$٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$		$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣} = \frac{٢٧}{٨}$
الصيغة اللوغاريتمية		$\text{لـو}_{١٠}\ ١٠٠٠ = ٣$		$\text{لـو}_{٩}\ ٣ = \frac{١}{٢}$	

٦) إذا علمت أن $\text{لـو}_{٢}\ ٥ \approx ٢,٣٢٢$، فأوجد القيمة التقريبية لـ $\text{لـو}_{٢}\ ١٢٥$

٧) إذا علمت أن $\text{لـو}_{٣}\ ١٠٠ \approx ٤,١٩٢$، فأوجد القيمة التقريبية لـ $\text{لـو}_{٣}\ ١٠$

٦-٢ اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ (اللوغاريتم الاعتيادي)

وجد الرياضيون في القرن السادس عشر أن عليهم أن يضعوا جداول لوغاريتمية، واقتنعوا بعدم إمكان وضع هذه الجداول لكل الأسس، لأن أساس اللوغاريتم يمكن له أن يكون أي عدد موجب غير ١، لذلك تعيّن عليهم أن يختاروا الأساس الذي سيستخدمونه، فوقع خيارهم على العدد ١٠ ولهذا الاختيار عدد من الأسباب المقنعة:

أولًا: لأننا نعدّ في النظام العشري.

ثانيًا: إذا كنا نعلم اللوغاريتم العشري للعدد س، فبإمكاننا معرفة اللوغاريتمات العشرية للأعداد ١٠س، ١٠٠س، ١٠٠٠س... وذلك ببساطة من خلال إضافة ١، ٢، ٣... إلى اللوغاريتم العشري للعدد س

كذلك يمكننا إيجاد اللوغاريتمات العشرية للأعداد ٠,١ س، ٠,٠١ س، ٠,٠٠١ س ... وذلك من خلال طرح ١، ٢، ٣... من اللوغاريتم العشري للعدد س

انظر الأمثلة:

$\text{لـو}_{١٠}\, ٧ = ٠,٨٤٥$ لأن $١٠^{٠,٨٤٥} = ٧$

$\text{لـو}_{١٠}\, ٧٠ = ١,٨٤٥$ لأن $١٠^{١,٨٤٥} = ١٠^{١} \times ١٠^{٠,٨٤٥} = ١٠ \times ٧ = ٧٠$

$\text{لـو}_{١٠}\, ٧٠٠ = ٢,٨٤٥$ لأن $١٠^{٢,٨٤٥} = ١٠^{٢} \times ١٠^{٠,٨٤٥} = ١٠٠ \times ٧ = ٧٠٠$

$\text{لـو}_{١٠}\, ٠,٧ = -٠,١٥٥$ لأن $١٠^{-٠,١٥٥} = ١٠^{-١ + ٠,٨٤٥} = ١٠^{-١} \times ١٠^{٠,٨٤٥} = ٠,١ \times ٧ = ٠,٧$

مفتاح اللوغاريتم العشري في الحاسبة هو $\boxed{\log_{10}}$ أو $\boxed{\log}$ أو $\boxed{\lg}$

تحقق ممّا إذا كنت تعرف المفتاح الذي عليك استخدامه من خلال تأكيد ما يلي:

$\text{لـو}_{١٠}\, ١٠ = ١$، باستخدام مفاتيح الحاسبة $\boxed{\log}\ \boxed{10}\ \boxed{=}$ أو $\boxed{\log_{10}}\ \boxed{10}\ \boxed{=}$

$\text{لـو}_{١٠}\, ١٠٠ = ٢$، باستخدام مفاتيح الحاسبة $\boxed{\log}\ \boxed{100}\ \boxed{=}$ أو $\boxed{\log_{10}}\ \boxed{100}\ \boxed{=}$

$\text{لـو}_{١٠}\, ٧ \approx ٠,٨٤٥$، باستخدام مفاتيح الحاسبة $\boxed{\log}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$ أو $\boxed{\log_{10}}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$

$\text{لـو}_{١٠}\, ٠,٧ \approx -٠,١٥٥$، باستخدام مفاتيح الحاسبة $\boxed{\log}\ \boxed{0.7}\ \boxed{=}$ أو $\boxed{\log_{10}}\ \boxed{0.7}\ \boxed{=}$

نتيجة ٢

تُعرف اللوغاريتمات العشرية باللوغاريتمات الاعتيادية. قد ترى اللوغاريتم العشري لـ س مكتوبًا بالشكل $\text{لـو}_{١٠}$ س أو لـو س

استكشف ٢

ناقش مع زملائك سبب كون هذه العبارات الثلاث صحيحة:

١) لـو ١٠ = ١

٢) لـو ١ = ٠

٣) $\text{لـو}\, ١٠^{\text{س}} = \text{س}$ لكل القيم الحقيقية لـ س

في بداية هذه الوحدة، ناقشنا كيفية استخدام المقياس اللوغاريتمي لقياس قوة الزلازل.

ومقياس الأس الهيدروجيني هو أيضًا لوغاريتمي (يقيس تركيز أيونات الهيدروجين النشطة في محلول مائي) إذا تغير تركيز الأيونات بمعامل ١٠، فإن قيمة الأس الهيدروجيني تتغير بمقدار وحدة واحدة.

هذا لأنه إذا قمت بضرب عدد في ١٠ فإن قيمة اللوغاريتم العشري تزيد بمقدار ١، وإذا قمت بضرب عدد في ١٠٠ فإن قيمة اللوغاريتم العشري الخاص به تزيد بمقدار ٢ بالضبط، وهكذا.

يمكنك أن ترى هذا بنفسك باستخدام الحاسبة: لـو ٢٠ = ١,٣٠، لـو ٢٠٠ = ٢,٣٠، لـو ٢٠٠٠ = ٣,٣٠

نتيجة ٣

للوغاريتم ذي الأساس ١٠:

إذا كان ص = ١٠^{س}، فإن س = لـو ص

العبارة ص = ١٠^{س} ⇔ س = لـو ص تبيّن كيف نحوّل من الصيغة الأسّية إلى الصيغة اللوغاريتمية، وبالعكس.

مثــال ٦

بدون استخدام الحاسبة، بيّن أن لـو ١٠٠ − لـو ٠,٠٠٠١ + لـو ١٠ = ٧

الحــلّ:

لـو$_{أ}$ أ^{س} = س

لـو ١٠٠ = ٢ لأن ١٠٠ = ١٠^{٢}، ∴ قيمة الحدّ الأول هي ٢

لـو ٠,٠٠٠١ = −٤ لأن ٠,٠٠٠١ = ١٠$^{-٤}$، ∴ قيمة الحدّ الثاني هي −٤

لـو ١٠ = ١ لأن ١٠ = ١٠^{١}، ∴ قيمة الحدّ الثالث هي ١

∴ لـو ١٠٠ − لـو ٠,٠٠٠١ + لـو ١٠ = ٢ − (−٤) + ١ = ٧

مثــال ٧

أ حوّل ١٠^{س} = ٦٦ إلى الصيغة اللوغاريتمية.

ب باستخدام الحاسبة أوجد قيمة س إذا علمت أن ١٠^{س} = ٦٦ (أعطِ الإجابة الصحيحة مقربة إلى أقرب منزلتين عشريتين).

الحــلّ:

أ الصيغة اللوغاريتمية لـ $١٠^{س} = ٦٦$ هي لــو ٦٦ = س

ب إذا ضغطنا على المفاتيح $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{66}$ $\boxed{=}$ يظهر $\boxed{1.8195...}$

س = ١,٨٢

مثــال ٨

اكتب لــو س = ٢,٣ في الصيغة الأسية، ثم استخدم الحاسبة لتجد قيمة س،
أعطِ الإجابة مقربة إلى أقرب عدد صحيح.

الحــلّ:

الصيغة الأسّية للمعادلة لــو س = ٢,٣ هي $١٠^{٢,٣}$ = س

إذا ضغطنا على المفاتيح $\boxed{10^x}$ $\boxed{2.3}$ $\boxed{=}$ يظهر $\boxed{199.52...}$

قرّب الإجابة إلى أقرب عدد صحيح، فتكون الإجابة هي س = ٢٠٠

مثــال ٩

أوجد قيمة لــو $\left(\frac{٢٥٠٠ \times ٠,٠٤}{٢^{٣} \times ٥^{٣}}\right)$

الحــلّ:

$\text{لــو}\left(\frac{٢٥٠٠ \times ٠,٠٤}{٢^{٣} \times ٥^{٣}}\right) = \text{لــو}\left(\frac{١٠٠}{٨ \times ١٢٥}\right)$

$= \text{لــو}\left(\frac{١٠٠}{١٠٠٠}\right)$

= لــو ٠,١

= −١

لــو ٠,١ = −١ لأن ٠,١ = $١٠^{-١}$

تمارين ٦-٢

١) حوّل كلًا مما يلي من الصيغة الأسّية إلى الصيغة اللوغاريتمية:

أ $١٠^{٢} = ١٠٠$

ب $١٠^{س} = ٢٠٠$

ج $١٠^{ل} = ق$

د $١٠^{-ز} = ت$

٢) حول كلًا ممّا يلي إلى الصيغة اللوغاريتمية، تحقق من الحل باستخدام الحاسبة:

أ $١٠^{س} = ٥٢$

ب $١٠^{س} = ٥٢٠$

ج $١٠^{س} = ٤$

د $١٠^{س} = ٤٠٠٠٠٠$

هـ $١٠^{س} = ١٢٣٤$

و $١٠^{س} = ١٢,٣٤$

ز $١٠^{س} = ٦٠٠٠٠٠٠$

ح $١٠^{س} = ٠,٦$

٣) حوّل كلًا ممّا يلي إلى الصيغة الأسية، وأوجد قيمة س ثم تحقق من الحل باستخدام الحاسبة:

أ لـو(س + ١) = ٢

ب لـو(س − ١١١) = ٣

ج لـو(٢س − ٤) = ١

د لـو(٧س + ٢) = ٢

هـ $\text{لـو}\left(\frac{٢س + ٨}{س}\right) = ٠$

و لـو ٤٠٠س = ٤

ز لـو(٢٠س − ٠,٣) = −١

ح $\text{لـو}\left(\frac{س}{٢٠٠} - ٢\right) = -٢$

باستخدام المفتاح log في الحاسبة، أجب عن الأسئلة ٤، ٥، ٦:

٤) بيّن أن

أ لـو ٣٠ = لـو ١٠ + لـو ٣

ب $\text{لـو}\,\frac{١٠}{٣} = \text{لـو}\,١٠ - \text{لـو}\,٣$

٥) بيّن أن

أ لـو ٧٠٠ = لـو ١٠٠ + لـو ٧

ب $\text{لـو}\,\frac{١٠٠}{٧} = \text{لـو}\,١٠٠ - \text{لـو}\,٧$

٦) بيّن أن

أ لـو ٢٠٠٠ = لـو ١٠٠٠ + لـو ٢

ب لـو ٥٠٠ = لـو ١٠٠٠ − لـو ٢

٦-٣ قوانين اللوغاريتمات

استكشف ٣

١) سُئل سعيد وزياد عمّا يعتقدان عن الصيغة التي يمكن أن نبسّط إليها العبارة $\text{لـو}_{٢}\ ٣٢ + \text{لـو}_{٢}\ ٨$

يقول سعيد إن: $\text{لـو}_{٢}\ ٣٢ + \text{لـو}_{٢}\ ٨ = \text{لـو}_{٢}\ (٣٢ + ٨) = \text{لـو}_{٢}\ ٤٠$

ويقول زياد إن: $\text{لـو}_{٢}\ ٣٢ + \text{لـو}_{٢}\ ٨ = \text{لـو}_{٢}\ (٣٢ \times ٨) = \text{لـو}_{٢}\ ٢٥٦$

ناقش صحّة قول كل منهما، وتحقّق ما إذا كانت المقولة الصحيحة تصلح للوغاريتم ذي الأساس ٢ ولأزواج أخرى من الأعداد.

٢) هل يمكنك توقع الذي يمكن أن نبسط إليه العبارة $\text{لـو}_{٢}\ ٣٢ - \text{لـو}_{٢}\ ٨$؟

تحقق ما إذا كانت طريقتك للتوقع تصلح للوغاريتم ذي الأساس ٢ ولأزواج أخرى من الأعداد.

٣) هل تعتقد أن الطرائق المستخدمة لتبسيط جمع وطرح اللوغاريتمات ذات الأساس ٢ يمكن استخدامها لأساسات أخرى؟

نتيجة ٤

يمكن استخدام قوانين اللوغاريتم الآتية لأيّ أساس، حيث أ، س، ص > ٠، أ $\neq ١$، ن $\neq ٠$

قانون الضرب

$\text{لـو}_{أ}\ (س\ ص) = \text{لـو}_{أ}\ س + \text{لـو}_{أ}\ ص$

قانون القسمة

$\text{لـو}_{أ}\ \left(\frac{س}{ص}\right) = \text{لـو}_{أ}\ س - \text{لـو}_{أ}\ ص$

قانون القوة

$\text{لـو}_{أ}\ س^{ن} = ن\ \text{لـو}_{أ}\ س$

أيضًا باستخدام قانون القوة: $\text{لـو}_{أ}\ \left(\frac{١}{س}\right) = \text{لـو}_{أ}\ س^{-١} = -\text{لـو}_{أ}\ س$

براهين قوانين اللوغاريتم

قانون الضرب

نفرض أن $م = \text{لـو}_{أ}\ س$ $\therefore$ $س = أ^{م}$

نفرض أن $ن = \text{لـو}_{أ}\ ص$ $\therefore$ $ص = أ^{ن}$

$س\ ص = أ^{م} \times أ^{ن}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$\text{لـو}_{أ}\ (س\ ص) = \text{لـو}_{أ}\ (أ^{م} \times أ^{ن})$

$= \text{لـو}_{أ}\ (أ^{م+ن})$ استخدم $\text{لـو}_{أ}\ أ^{س} = س$

$= م + ن$

$= \text{لـو}_{أ}\ س + \text{لـو}_{أ}\ ص$

قانون القسمة

نفرض أن م = $لـو_{أ}$ س ∴ س = $أ^{م}$

ونفرض أن ن = $لـو_{أ}$ ص ∴ ص = $أ^{ن}$

$\frac{س}{ص} = \frac{أ^{م}}{أ^{ن}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

$لـو_{أ}\left(\frac{س}{ص}\right) = لـو_{أ}\left(\frac{أ^{م}}{أ^{ن}}\right)$

$= لـو_{أ}(أ^{م - ن})$ استخدم $لـو_{أ}$ $أ^{س}$ = س

= م − ن

= $لـو_{أ}$ س − $لـو_{أ}$ ص

قانون القوة

نفرض أن م = $لـو_{أ}$ س ∴ س = $أ^{م}$

س = $أ^{م}$ ارفع الطرفَين إلى القوة ك

$س^{ك} = (أ^{م})^{ك}$

$س^{ك} = أ^{م ك}$ خذ اللوغاريتم ذا الأساس أ لكلا الطرفَين

$لـو_{أ}$ $س^{ك}$ = $لـو_{أ}$ $أ^{ك م}$ استخدم $لـو_{أ}$ $أ^{س}$ = س

$لـو_{أ}$ $س^{ك}$ = ك م عوّض عن م = $لـو_{أ}$ س

$لـو_{أ}$ $س^{ك}$ = ك $لـو_{أ}$ س

مثـــال ١٠

اكتب في صورة لوغاريتم واحد:

أ $لـو_{٥}$ ١١ + $لـو_{٥}$ ٩

ب $لـو_{٧}$ ١٠٠ − ٢$لـو_{٧}$ ٥

الحــلّ:

أ $لـو_{٥}$ ١١ + $لـو_{٥}$ ٩ = $لـو_{٥}$(١١ × ٩) استخدم قانون الضرب

= $لـو_{٥}$ ٩٩

ب $لـو_{٧}$ ١٠٠ − ٢$لـو_{٧}$ ٥ = $لـو_{٧}$ ١٠٠ − $لـو_{٧}$ $٥^{٢}$ استخدم قانوني القوة والقسمة.

= $لـو_{٧}\left(\frac{١٠٠}{٥^{٢}}\right)$

= $لـو_{٧}$ ٤

مثال ١١

أ أوجد قيمة ٣لـو$_{٢٤}$ ١٢ − $\frac{١}{٢}$ لـو$_{٢٤}$ ٩

ب إذا علمت أن لـو$_{٥}$ ١٧ ≈ ١,٧٦ ، فأوجد القيمة التقريبية لـ لـو$_{٥}$ ٨٥

الحـــلّ:

أ ٣لـو$_{٢٤}$ ١٢ − $\frac{١}{٢}$ لـو$_{٢٤}$ ٩ = لـو$_{٢٤}$ ١٢^{٣} − لـو$_{٢٤}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ — استخدم قانونَي القوة والقسمة

= لـو$_{٢٤}$ $\left(\frac{١٢^{٣}}{\sqrt{٩}}\right)$ — بسّط الأعداد

= لـو$_{٢٤}$ ٥٧٦ — لاحظ أن ٥٧٦ = ٢٤^{٢}

= لـو$_{٢٤}$ ٢٤^{٢} — استخدم لـو$_{أ}$ أ^{س} = س

= ٢

ب لـو$_{٥}$ ٨٥ = لـو$_{٥}$ (٥ × ١٧) — اكتب ٨٥ على شكل (الأساس × العامل الآخر)

= لـو$_{٥}$ ٥ + لـو$_{٥}$ ١٧ — استخدم لـو$_{أ}$ أ = ١

= ١ + ١,٧٦

= ٢,٧٦

مثال ١٢

بسّط $\frac{\text{لـو}_{٤}\ ٦٤}{\text{لـو}_{٤}\ ١٠٢٤}$

الحـــلّ:

$\frac{\text{لـو}_{٤}\ ٦٤}{\text{لـو}_{٤}\ ١٠٢٤} = \frac{\text{لـو}_{٤}\ ٤^{٣}}{\text{لـو}_{٤}\ ٤^{٥}}$ — اكتب ٦٤، ١٠٢٤ في صورة قوى لـ ٤، استخدم قانون القوى

$= \frac{٣\text{لـو}_{٤}\ ٤}{٥\text{لـو}_{٤}\ ٤}$ — استخدم لـو$_{أ}$ أ = ١

$= \frac{٣}{٥}$

تمارين ٦-٣

١) استخدم قوانين اللوغاريتمات لتبسيط كل من الآتي، واكتبه في صورة لوغاريتم واحد:

أ ٢ لـو$_{٢}$ ٩ + لـو$_{٢}$ ١٠

ب ٣لـو$_{٢}$ ٦ − ٢لـو$_{٢}$ ١٢

ج ٤ لـو$_{٥}$ ٣ − $\frac{١}{٢}$ لـو$_{٥}$ ٢٥

د ٣لـو$_{٧}$ ١ + ٢لـو$_{٧}$ ٢ − ٠,٥ لـو$_{٧}$ ٩

هـ ١ + ٢لـو$_{٦}$ ٩ − $\frac{١}{٣}$ لـو$_{٦}$ ٨

و ٣لـو$_{٤}$ ٢ + $\frac{٢}{٣}$لـو$_{٤}$ ٢٧ − $\frac{١}{٢}$

٢) أوجد قيمة كلّ من الآتي:

أ) لو$_{٢}$ ٨٠ − لو$_{٢}$ ٥ ‏ ‏ ‏ ب) لو$_{٣}$ ٥٤ − $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ٤

ج) لو$_{٤}$ ٤٠ − لو$_{٤}$ ٥ ‏ ‏ ‏ د) لو$_{٢}$ ٣ − لو$_{٢}$ ٩٦

هـ) لو$_{٦}$ ١٨ + لو$_{٦}$ ١٢ − $\frac{١}{٢}$ لو$_{١١}$ ١٢١ ‏ ‏ ‏ و) لو$_{١٦}$ ٢٠ + لو$_{١٦}$ $\frac{١}{٥}$ − ٥ لو$_{١٦}$ ٢

٣) من خلال كتابة ٨ و ٠,٢٥ في صورة قوة لـ ٢، بسّط $\frac{\text{لو}_{٥}\ ٨}{\text{لو}_{٥}\ ٠,٢٥}$

٤) بسّط:

أ) $\frac{\text{لو}_{٣}\ ٩}{\text{لو}_{٣}\ ٢٧}$ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{\text{لو}_{٢}\ ١٢٨}{\text{لو}_{٢}\ ١٦}$

ج) $\frac{\text{لو}_{٤}\ \frac{١}{٦٤}}{\text{لو}_{٤}\ ٤}$ ‏ ‏ ‏ د) $\frac{\text{لو}_{٢}\ \frac{١}{١٦}}{\text{لو}_{٢}\ ٨}$

٥) إذا علمت أن ص = لو$_{٥}$ س ، فاكتب كلًا من الآتي بدلالة ص:

أ) س ‏ ‏ ‏ ب) لو$_{٥}$ ٥س ‏ ‏ ‏ ج) لو$_{٥}$ $\frac{٥}{\text{س}}$

٦) إذا علمت أن س = لو$_{٢}$ أ ، ص = لو$_{٢}$ ب ، فاكتب كلًا من الآتي بدلالة س، ص:

أ) لو$_{٢}$ أب ‏ ‏ ‏ ب) لو$_{٢}$ أ^{٢} + لو$_{٢}$ ب^{٣} ‏ ‏ ‏ ج) لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{أ}}$ − لو$_{٢}$ ب^{٢}

٧) تعرف رهف أن لو ٤٣٦٥١٦ ≈ ٥,٦٤ ، أن لو ٢٢٩١ ≈ ٣,٣٦

بيّن كيف يمكنها استخدام هذه المعلومات لتكتب القيم الآتية في صورة قوة للعدد ١٠

أ) ٤٣٦٥١٦ × ٢٢٩١ ‏ ‏ ‏ ب) ٤٣٦٥١٦ ÷ ٢٢٩١

ج) $\sqrt{٤٣٦٥١٦}$ ‏ ‏ ‏ د) $\sqrt[٣]{٢٢٩١}$

٦-٤ حل المعادلات اللوغاريتمية

تعلمت سابقًا الخطوات الأولى في حل المعادلات اللوغاريتمية مثل $\text{لـو}_{٢}\,(س + ٣) = ٤$

وحتى نحلّها نكتب المعادلة في الصيغة الأسّية على الشكل $س + ٣ = ٢^{٤}$ ومنها نحصل على

$س = ١٦ - ٣ = ١٣$

يمكننا الآن استخدام قوانين اللوغاريتمات مع التحويل إلى الصيغة الأسية لنحل المعادلات اللوغاريتمية.

مثـــال ١٣

حلّ المعادلة اللوغاريتمية $\text{لـو}_{٢}\,٨س = ١٠$

الحــلّ:

$\text{لـو}_{٢}\,٨س = ١٠$	استخدم قانون الضرب
$\text{لـو}_{٢}\,٨ + \text{لـو}_{٢}\,س = ١٠$	بسّط
$٣ + \text{لـو}_{٢}\,س = ١٠$	أعد ترتيبها
$\text{لـو}_{٢}\,س = ٧$	حوّل إلى الصيغة الأسية
$س = ٢^{٧}$	أوجد قيمة س
$س = ١٢٨$	

مثـــال ١٤

حلّ المعادلة اللوغاريتمية $٣\,\text{لـو}_{س}\,٢ = -١$

الحــلّ:

$٣\,\text{لـو}_{س}\,٢ = -١$	استخدم قانون القوى
$\text{لـو}_{س}\,٢^{٣} = -١$	
$\text{لـو}_{س}\,٨ = -١$	اكتب في الصيغة الأسية
$س^{-١} = ٨$	
$\frac{١}{س} = ٨$	
$س = \frac{١}{٨}$	

مثــال ١٥

حلّ المعادلة اللوغاريتمية $لــو_٣ س - ٣ لــو_٣ ٢ = لــو_٣ \frac{٣}{٢}$

الحــلّ:

$لــو_٣ س - ٣ لــو_٣ ٢ = لــو_٣ \frac{٣}{٢}$	استخدم قانون القوى
$لــو_٣ س - لــو_٣ ٢^٣ = لــو_٣ \frac{٣}{٢}$	
$لــو_٣ س - لــو_٣ ٨ = لــو_٣ \frac{٣}{٢}$	استخدم قانون القسمة
$لــو_٣ \frac{س}{٨} = لــو_٣ \frac{٣}{٢}$	القيم التي نأخذ لها اللوغاريتم ذا الأساس ٣ متساوية
$\frac{س}{٨} = \frac{٣}{٢}$	
$س = ١٢$	

مثــال ١٦

حلّ المعادلة اللوغاريتمية $٢ لــو_٣ ٢٧ + لــو_٣ \frac{س}{٩} = لــو_٣ \frac{١}{٣}$

الحــلّ:

$٢ لــو_٣ ٢٧ + لــو_٣ \frac{س}{٩} = لــو_٣ \frac{١}{٣}$	استخدم قانون القسمة واستخدم $لــو_٣ \frac{١}{٣} = -١$
$٢ لــو_٣ ٣^٣ + [لــو_٣ س - لــو_٣ ٩] = -١$	استخدم قانون القوة واستخدم $لــو_٣ ٩ = ٢$
$٦ لــو_٣ ٣ + [لــو_٣ س - ٢] = -١$	
$٦ + لــو_٣ س - ٢ = -١$	استخدم $لــو_٣ ٣ = ١$
$لــو_٣ س = -١ + ٢ - ٦$	
$لــو_٣ س = -٥$	اكتب في الصيغة الأسّية
$س = ٣^{-٥}$	
$س = \frac{١}{٢٤٣}$	

تمارين ٦-٤

١) حلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

أ) $\text{لو}_{٢}\ \text{س} = ٣$
ب) $\text{لو}_{٩}\ \text{س} = \frac{٣}{٢}$
ج) $\text{لو}_{٥}\ \text{س} = -٣$
د) $\text{لو}_{٠,١٢٥}\ \text{س} = -١$

٢) حلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

أ) $\text{لو}_{٧}(\text{س} + ١) = ٠$
ب) $\text{لو}_{٤}(\text{س} - ٥) = ٢$
ج) $\text{لو}_{٢}(\text{س} + ٣) = ٤$
د) $\text{لو}_{٣}(٢\text{س} - ٣) = ٣$
هـ) $\text{لو}_{١٠}(٧\text{س} + ٢) = ٢$
و) $\text{لو}_{٩}(١ - ٢\text{س}) = ٢$
ز) $\text{لو}_{٤}(٢ - \text{س}) = \frac{٣}{٢}$
ح) $\text{لو}_{١٢٥}(٦\text{س} - ١٧) = \frac{٢}{٣}$
ط) $\text{لو}_{٥}\left(\frac{\text{س} - ١}{١٠}\right) = -١$
ي) $\text{لو}_{٦}\ \frac{٢}{\text{س}} = -٢$
ك) $\text{لو}_{\text{س}}\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = -٢$
ل) $\text{لو}_{٩}\left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} + ٢}\right) = \frac{١}{٢}$

٣) حلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

أ) $\text{لو}_{٥}\ \text{س} + \text{لو}_{٥}\ ٢ = \text{لو}_{٥}\ ١٢$
ب) $\text{لو}_{٧}\ ٩٦ = \text{لو}_{٧}\ \text{س} - \text{لو}_{٧}\ ١٢$
ج) $\text{لو}\ ٢٠ = \text{لو}\ ٥ - \text{لو}\ \text{س}$
د) $٢\ \text{لو}_{٣}\ ٨ = \text{لو}_{٣}\ \text{س} + \text{لو}_{٣}\ ٤٠$
هـ) $\text{لو}_{٨}\ ١٥ = ٢\ \text{لو}_{٨}\ ٦ - \text{لو}_{٨}\ ٢\text{س}$
و) $\text{لو}_{٣}\ ٣٤ = \text{لو}_{٣}\ ١٧\text{س} - \text{لو}_{٣}\ ٥$
ز) $٢\ \text{لو}_{١١}\ ١٠ = \text{لو}_{١١}\ \frac{\text{س}}{٢} + \text{لو}_{١١}\ ٨$
ح) $\text{لو}_{٣}\ ١٨ - \text{لو}_{٣}\ \frac{٢\text{س}}{٥} = \text{لو}_{٣}\ ٢$

٤) حلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية، وأعطِ الإجابة مقربة إلى أقرب عددين عشريين:

أ) $\text{لو}_{٥}(٢\text{س} - ١) + \text{لو}_{٥}\ ٣ = \text{لو}_{٥}\ ٢١$
ب) $\text{لو}_{٧}\ ٢\text{س} = ٢\text{لو}_{٧}\ ١٤ - \text{لو}_{٧}\ ٢$
ج) $٢\ \text{لو}_{٩}\ ٢ + \text{لو}_{٩}\ \text{س} = \text{لو}_{٩}\ ٢٠$
د) $\text{لو}_{٢}(٢ - \text{س}) + \text{لو}_{٢}\ ٩ = \text{لو}_{٢}\ ٦$
هـ) $\text{لو}_{١١}(\text{س} - ٤) = \text{لو}_{١١}\ ٥ + \text{لو}_{١١}\ ٢$
و) $\text{لو}_{٣}(١ - \text{س}) - \text{لو}_{٣}\ ٢\text{س} = -٢$
ز) $\text{لو}_{٢}\ ١٣ = \text{لو}_{٢}(\text{س} - ٣) - \text{لو}_{٢}\ \text{س}$
ح) $\text{لو}_{٠,٥}\ ٣٢ - ٢\text{لو}_{٠,٥}\ ٢\sqrt{\text{س}} = \text{لو}_{٠,٥}\ ١٠$

مُساعَدة
يمكنك تعويض -٢ بواسطة اللوغاريتم ذي الأساس ٣ للكسر $\frac{١}{٩}$

٥) حلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

أ) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٤٢ - \text{لو}_{\text{س}}\ ٦ = ١$
ب) $\text{لو}_{\text{س}}\ ٣٦ - ١ = \text{لو}_{\text{س}}\ ٤$
ج) $٢ - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{س}}\ ٣٦ = ١ + ٢\ \text{لو}_{\text{س}}\ ٣$

٦) حل المعادلة $\text{لو}_{٢}(\text{س} + ٣) = ١ + \text{لو}_{٢}\ \text{س}$

٦-٥ حل المعادلات الأسّية باستخدام اللوغاريتمات

لقد قمنا سابقًا بحل المعادلات الأسّية، مثل $٢^{س} = ١٦$، $٣^{س+١} = ٨١$

يمكن حلها من خلال كتابة ١٦ كقوة عددية للعدد ٢ وكتابة ٨١ كقوة عددية للعدد ٣

$٢^{س} = ١٦$		$٣^{س+١} = ٨١$
$٢^{س} = ٢^{٤}$	الأسس متساوية	$٣^{س+١} = ٣^{٤}$
$س = ٤$		$س + ١ = ٤$
		$س = ٣$

بعض المعادلات لا يمكن حلها بسهولة مثل $٧^{س} = ٣٠$، لأنه لا يمكن كتابة ٣٠ كقوة عددية للعدد ٧، لذلك باستخدام قوانين اللوغاريتمات يمكننا كتابة المعادلة بدلالة س، وبالتالي حلها.

ويمكننا استخدام أيّ أساس للوغاريتم، لكن استخدام الأساس ١٠ هو الأنسب لأن كل القيم الضرورية مخزنة في الحاسبات.

فيما يلي طريقة حل المعادلة الأسية $٧^{س} = ٣٠$

$٧^{س} = ٣٠$	خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للطرفَين
$لـو ٧^{س} = لـو ٣٠$	استخدم قانون القوة
$س لـو ٧ = لـو ٣٠$	اقسم الطرفَين على لـو ٧
$س = \frac{لـو ٣٠}{لـو ٧}$	أوجد قيمة س
$س = ١,٧٤٧...$	

بالتقريب إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية فإن $س = ١,٧٥$

حتى نكتب المعادلة الأسّية بالصيغة $ص = ب^{س}$ ونحلّها، نأخذ لوغاريتم الطرفَين، ثم نستخدم قوانين اللوغاريتمات لنحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة ٥

إذا كانت $ص = ب^{س}$

فإن $س = \frac{لـو_{أ} ص}{لـو_{أ} ب}$ أو $س = \frac{لـو ص}{لـو ب}$ (اللوغاريتم الاعتيادي)

مثــال ١٧

حلّ المعادلة $٥^{س - ٢} = ٦٠$ مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

$٥^{س - ٢} = ٦٠$	خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للطرفَين
$لــو ٥^{س - ٢} = لــو ٦٠$	استخدم قانون القوة
$(س - ٢) لــو ٥ = لــو ٦٠$	اقسم الطرفَين على لو ٥
$س - ٢ = \frac{لــو ٦٠}{لــو ٥}$	
$س = \frac{لــو ٦٠}{لــو ٥} + ٢$	
$س = ٢,٥٤٣... + ٢$	
$س \approx ٤,٥٤$	بالتقريب إلى ثلاثة أرقام معنوية

مُساعَدة

انتبه حتى لا ترتكب هذا الخطأ الشائع في الحذف: $\frac{لــو ٦٠}{لــو ٥}$ ليست متساوية مع $لــو \frac{\cancel{٦٠}^{١٢}}{\cancel{٥}}$

مثــال ١٨

حلّ المعادلة $٣^{٢س} = ٤^{س + ٥}$ مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

$٣^{٢س} = ٤^{س + ٥}$	خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للطرفَين
$لــو ٣^{٢س} = لــو ٤^{س + ٥}$	استخدم قانون القوة
$٢س لــو ٣ = (س + ٥) لــو ٤$	فكّ الأقواس
$٢س لــو ٣ = س لــو ٤ + ٥ لــو ٤$	جمّع كل الحدود التي تحتوي على س في طرف واحد
$٢س لــو ٣ - س لــو ٤ = ٥ لــو ٤$	أخرج س كعامل مشترك
$س(٢ لــو ٣ - لــو ٤) = ٥ لــو ٤$	اقسم الطرفَين على معامل س
$س = \frac{٥ لــو ٤}{٢ لــو ٣ - لــو ٤}$	أوجد قيمة س
$س \approx ٨,٥٥$	

مثــال ١٩

حلّ المعادلة $٤ \times ٣^{٢س - ٥} = ٨٠ \text{لـو} ١٠^{\frac{٣}{٢}}$ ثم قرّب الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتَين.

الحــلّ:

$٤ \times ٣^{٢س - ٥} = ٨٠ \text{لـو} ١٠^{\frac{٣}{٢}}$	اقسم الطرفَين على ٤
$٣^{٢س - ٥} = ٢٠ \text{لـو} ١٠^{\frac{٣}{٢}}$	استخدم قانون القوة
$٣^{٢س - ٥} = ٣٠ \times \text{لـو} ١٠$	استخدم لـو ١٠ = ١
$٣^{٢س - ٥} = ٣٠$	خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للطرفَين
$\text{لـو} ٣^{٢س - ٥} = \text{لـو} ٣٠$	استخدم قانون القوة
$(٢س - ٥) \text{لـو} ٣ = \text{لـو} ٣٠$	اقسم الطرفَين على لـو ٣

$$٢س - ٥ = \frac{\text{لـو} ٣٠}{\text{لـو} ٣}$$

$$س = \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{لـو} ٣٠}{\text{لـو} ٣} + ٥\right)$$

$$س = ٤{,}٠٥$$

مثــال ٢٠

حل المعادلة $٢^{س} = ١٣$ وقرب الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

$$٢^{س} = ١٣$$

$$١٣ = ٢^{س}$$

$$س = \frac{\text{لـو} ١٣}{\text{لـو} ٢}$$

$$\approx ٣{,}٧٠$$

إذا كانت ص = $أ^{س}$ فإن $س = \frac{\text{لـو ص}}{\text{لـو أ}}$

نتيجة ٦

إذا كان ص = أ × $ب^{س}$ ، فإن $س = \frac{\text{لـو ص} - \text{لـو أ}}{\text{لـو ب}}$

مثــال ٢١

حل المعادلة $٣ \times ٥^{س} = ٢٩$ مقربًا الناتج إلى ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

$٣ \times ٥^{س} = ٢٩$

$٢٩ = ٣ \times ٥^{س}$

$س = \frac{لـو ٢٩ - لـو ٣}{لـو ٥}$

$\approx ١,٤١$

إذا كان $ص = أ \times ب^{س}$ فإن $س = \frac{لـو ص - لـو أ}{لـو ب}$

مثــال ٢٢

كتلة نوع معيّن من المواد المشعّة (م) غرام، معطاة حسب الصيغة $م = م_{.} \times (٠,٧)^{ن}$، حيث ($م_{.}$) هي الكتلة الابتدائية للمادة، (ن) هو الزمن بالسنوات.

أ الكتلة الابتدائية لعيّنة من هذه المادة تساوي ٤٠٠ غم. كم ستكون كتلتها بعد ٣ سنوات؟

ب احسب، وقرب إلى قيمة عشرية واحدة، عدد السنوات المطلوبة لتضمحل عيّنة (من هذه المادة) كتلتها ٨ كغم إلى كتلة تساوي ١٠٠ غم

الحــلّ:

أ $م = م_{.} \times (٠,٧)^{ن}$ — عوّض عن $م_{.} = ٤٠٠$، $ن = ٣$

$= ٤٠٠ \times (٠,٧)^{٣}$

$= ١٣٧,٢$

بعد ٣ سنوات، ستكون الكتلة ١٣٧,٢ غم

ب عوّض عن $م = ١٠٠$، $م_{.} = ٨٠٠٠$

$٨٠٠٠ \times (٠,٧)^{ن} = ١٠٠$ — اقسم الطرفين على ٨٠٠٠

$(٠,٧)^{ن} = ٠,٠١٢٥$ — خذ اللوغاريتم ذا الأساس ١٠ للطرفين

$لـو (٠,٧)^{ن} = لـو ٠,٠١٢٥$ — استخدم قانون القوة

$ن لـو (٠,٧) = لـو ٠,٠١٢٥$ — اقسم الطرفين على لـو ٠,٧

$ن = \frac{لـو ٠,٠١٢٥}{لـو ٠,٧}$

$ن = ١٢,٢٨ ...$

يلزم ١٢,٣ سنوات حتى تضمحل الكتلة إلى ١٠٠ غم

مُساعَدة

يمكن استخدام النتيجة ٥ لحل الجزئية ب في الأمثلة ٢٢ و ٢٣، لكن الحل الكامل يظهر في كلتا الحالتين. يمكن أيضًا استخدام النتيجة ٤، ولكن فقط بعد تقسيم طرفي المعادلات.

مثــال ٢٣

يعطي حساب توفير فائدة مركبة بمعدل شهري قدره ٦٪

قيمة الاستثمار الأولي (ص) لـ س ريال عُماني تعطى من خلال ص = س × $(١,٠٦)^{م}$ حيث (س) بالريال العماني، (م) هو عدد الأشهر بعد إجراء الاستثمار لأول مرة.

أ أوجد لأقرب ريال عُماني، قيمة الاستثمار الأولي لـ ٨٠٠٠ ريال عُماني بعد ٤ أشهر.

ب بعد كم شهر ستتضاعف قيمة الاستثمار الأولي لـ س ريال عُماني ثلاث مرات؟

قرّب الإجابة إلى أقرب شهر.

الحــلّ:

أ ص = س × $(١,٠٦)^{م}$	
ص = ٨٠٠٠ × $(١,٠٦)^{٤}$	عوّض س = ٨٠٠٠، م = ٤
= ... ١٠٠٩٩,٨١٥	
= ١٠١٠٠ ريال عُماني	قرّب الإجابة إلى أقرب ريال عُماني
ب ص = ٣ × ٨٠٠٠	تتضاعف ثلاث مرات تعني ٣ مرات أكبر
= ٢٤٠٠٠	
٨٠٠٠ × $(١,٠٦)^{م}$ = ٢٤٠٠٠	المعادلة التي يجب حلها
$(١,٠٦)^{م} = \frac{٢٤٠٠٠}{٨٠٠٠}$	بقسمة الطرفين على ٨٠٠٠
$١,٠٦^{م}$ = ٣	خذ اللوغاريتم للطرفين
لــو $(١,٠٦)^{م}$ = لــو٣	باستخدام قوانين القوى
م لــو ١,٠٦ = لــو٣	بقسمة الطرفين على لــو ١,٠٦
م = $\frac{\text{لــو ٣}}{\text{لــو ١,٠٦}}$	
م = ... ١٨,٨٥	قرّب حسب المطلوب في السؤال
م = ١٩ شهرًا	

تمارين ٦-٥

١) حلّ المعادلات الأسّية الآتية، قرّب الإجابة إلى أقرب عدد مكوّن من٣ أرقام معنوية:

أ $٥^{س} = ٢٠$ ب $٢^{س} = ٣٥$ ج $٣^{س} - ٨ = ٠$

د $٧^{س - ٤} = ٣٢$ هـ $١,١^{٢س} = ٠,٧$ و $٦^{٢س - ١} = ٥$

ز $٣^{س - ١} = ٠,٢$ ح $٢ \times ٩^{٢س} = ٨٧٦$ ط $\frac{٢^{٢س - ٣}}{٣} = ١٧$

ي $\frac{٢}{٥} \times ٥^{٢س} = \frac{٧}{٣}$ ك $٣^{٢س - ١} = ٣٣ \times ٣^{س + ٢}$ ل $٧^{س - ٢} = ٢^{س}$

٢) أ بيّن أن $٨ \times ٢^{س} + ٤ \times ٢^{س + ١} = ٢ \times ٢^{س + ٣}$

ب حلّ المعادلة $٨٠ \times ٢^{س} + ٤٠ \times ٢^{س + ١} = ٦٦٦٦$

٣) حلّ المعادلة $(٨)^{-س} = \frac{١}{٦٠}$

٤) كتلة نوع معيّن من المواد المشعّة (م) غرام، معطاة حسب الصيغة $م = م_{.} \times (٠,٩)^{ن}$، حيث $(م_{.})$ الكتلة الابتدائية للمادة، (ن) الزمن بالسنوات.

الكتلة الابتدائية لعيّنة من هذه المادة تساوي ١٠٠٠ غرام.

أ كم ستكون كتلتها بعد ١٠ سنوات؟ أعطِ الإجابة إلى أقرب غرام.

ب احسب، إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية، عدد السنوات المطلوبة لتضمحل عيّنة من هذه المادة إلى نصف كتلتها.

٥) عند إطلاق صاروخ بأعلى قوة، تتزايد سرعته بشكل أسّي. تعطى سرعة صاروخ ما (ي) م/ثانية، من خلال الصيغة $ي = ٤٣٦ \times (١,٠٥٦)^{ن}$، حيث (ن) هو عدد الثواني بعد الإطلاق.

أ اكتب السرعة الابتدائية للصاروخ.

ب ما هي النسبة المئوية التي تتزايد وفقها سرعة الصاروخ كل ثانية؟

ج احسب مقربًا الناتج إلى أقرب ثانية، الزمن الذي يستغرقه الصاروخ ليصل إلى سرعة ٢ كم/الثانية.

د ما هو باعتقادك سبب تزايد سرعة الصاروخ بعد إطلاقه بأعلى قوة؟ ناقش الموضوع مع زملائك.

٦) يدفع حساب توفير فائدة مركبة بمعدل شهري هو ٣٪

تعطى القيمة (و) لاستثمار ابتدائي لـ (ل) ريال عُماني، من خلال الصيغة $و = ل \times ١,٠٣^{م}$، حيث (م) هو عدد الأشهر بعد بدء الاستثمار.

أ أوجد قيمة استثمار ابتدائي بقيمة ٤٠٠٠ ريال عُماني بعد مرور ٥ أشهر.

ب ما عدد الأشهر الذي يتطلبه الاستثمار حتى تتضاعف قيمته؟ قرّب الإجابة إلى أقرب شهر.

٧) تتناقص أعداد مستعمرة حشرات (ل) بمعدل أسّي وتعطى من خلال الصيغة ل = ٣ × ٢$^{(٢٠ - ن)}$، حيث (ن) هو عدد الأسابيع بعد تسجيل العدد الابتدائي.

أ كم سيكون عدد الحشرات بعد ٨ أسابيع؟

ب ما عدد الأسابيع المطلوبة ليكون العدد ٣٨٤ حشرة فقط؟

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

أ $>$ ٠، س $>$ ٠، ص $>$ ٠، أ $\neq$ ١:

التحويل ما بين الصيغتَين الأسّية واللوغاريتمية

إذا كان ص = أ$^{\text{س}}$، فإن س = لـو$_{\text{أ}}$ص

قوانين اللوغاريتمات

للقيم الموجبة لـ س، ص:

قانون الضرب: لـو$_{\text{أ}}$(س ص) = لـو$_{\text{أ}}$س + لـو$_{\text{أ}}$ص

قانون القسمة: لـو$_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ = لـو$_{\text{أ}}$س − لـو$_{\text{أ}}$ص

قانون القوة: لـو$_{\text{أ}}$س$^{\text{ن}}$ = ن لـو$_{\text{أ}}$س

لـو$_{\text{أ}}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$ = لـو$_{\text{أ}}$س$^{-١}$ = − لـو$_{\text{أ}}$س

نتائج أخرى مفيدة

- لا يمكن لأساس اللوغاريتم أن يكون سالبًا.
- لا يمكن لأساس اللوغاريتم أن يكون مساويًا للصفر أو ١
- لا يمكن إيجاد اللوغاريتم للأعداد السالبة أو الصفر.
- أ^{١} = أ إذًا لو$_{\text{أ}}$ أ = ١
- أ^{٠} = ١ إذًا لو$_{\text{أ}}$ ١ = ٠
- لـو$_{\text{أ}}$أ$^{\text{س}}$ = س
- لـو$_{\text{أ}}\left(\frac{١}{\text{أ}}\right)$ = لـو$_{\text{أ}}$أ$^{-١}$ = −١
- أ$^{\text{لـو}_{\text{أ}}\text{س}}$ = س
- إذا كان أ$^{\text{س}}$ = أ$^{\text{ص}}$، فإن س = ص
- إذا كان لـو$_{\text{أ}}$س = لـو$_{\text{أ}}$ص، فإن س = ص

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) أ حوّل $٥^{س} = ٢٠$ إلى الصيغة اللوغاريتمية.

ب حوّل $لو_{١٣}\ ١٠٠ = ص$ إلى الصيغة الأسّية.

٢) إذا علمت أن $لو_{١٠}\ ١٠٠ \approx ١,٧٠$ و $لو_{١٠}\ ٢٥ \approx ١,١٩$ فأوجد القيمة التقريبية للآتي:

أ $لو_{١٠}\ ٢٥٠٠$ ب $لو_{١٠}\ ٤$ ج $لو_{١٠}\ \frac{١}{٤}$

د $لو_{١٠}\ ٦٢٥$ هـ $لو_{١٠}\ ١٥٠٠$ و $لو_{١٠}\ \frac{٥}{٣}$

٣) حلّ المعادلة اللوغاريتمية:

أ $لو_{٠,٢}\ ٥ - ٢\ لو_{٠,٢}\ \sqrt{س} = لو_{٠,٢}\ ٠,٠٠٨$

ب $لو_{٤}\ ٢^{٢س - ١} = ٣\ لو_{٤}\ \frac{١}{٦٤}$

٤) حلّ المعادلة واكتب الإجابة مقرّبة إلى أقرب عدد مكوّن من٣ أرقام معنوية:

أ $\frac{٩^{٣ - س}}{٣^{٢س - ٥}} = ١١ \times ٢٧^{\frac{٢}{٣}}$

ب $\frac{٤^{٢س}}{٨^{٥ - ٢س}} - لو_{٤}\ ٣٢ = لو_{١٦}\ ٤$

٥) أ بيّن أن $\left(\frac{١}{٢٧} \times ٣^{س - ١}\right) \div \left(٩ \times ٣^{٤ - س}\right) = ٣^{٢س - ١٠}$

ب حلّ المعادلة $\left(\frac{٤}{٩} \times ٣^{س - ١}\right) \div \left(١٠٨ \times ٣^{٤ - س}\right) = ١٠٠$

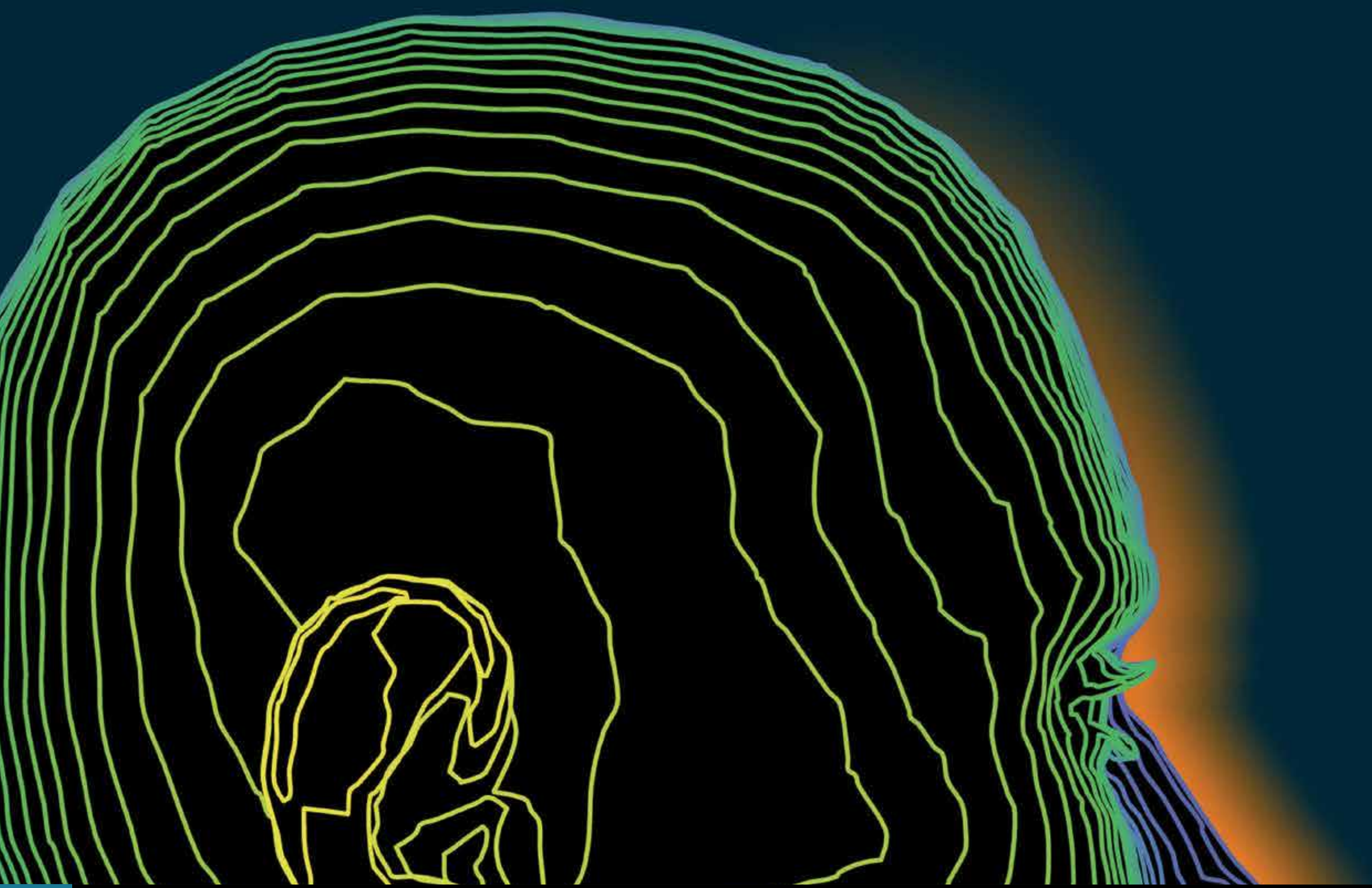
٦) بعد الوصول إلى سرعتها القصوى وهي ٢٤٠ كم/ساعة، تخفف سيارة سباق من سرعتها بحيث تتناقص السرعة أسّيًا بمعدل ٤٪ في الثانية.

تعطى سرعة السيارة (س) كم/ساعة، بعد تخفيف السرعة بـ (ن) ثانية، من خلال الصيغة

$س = أ \times ب^{ن}$

أ أوجد قيمة كل من أ، ب

ب كم ستكون سرعة السيارة بعد تخفيف السرعة بعشر ثوان؟



الوحدة السابعة
المصفوفات
Matrices

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧–١ تعرف ما هي المصفوفة وتصفها باستخدام الصفوف والأعمدة، وتعرف خصائص المصفوفة الصفرية والمحايدة والمربعة.

٧–٢ تجمع وتطرح المصفوفات.

٧–٣ تضرب مصفوفة في عدد ما.

٧–٤ تتعرف على شرط ضرب المصفوفات وتجد ناتج ضربها.

٧–٥ تتعرف أن ضرب المصفوفات ليس تبادليًا.

٧–٦ تحسب محدد المصفوفة ٢ × ٢

٧–٧ تعرف خصائص المصفوفة المنفردة والمصفوفة غير المنفردة

٧–٨ تجد المصفوفة العكسية للمصفوفات ٢ × ٢ غير المنفردة

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الأولى	تستخدم ترتيب العمليات الحسابية للأعداد.	١) أوجد القيمة أ ٨ × ٣ + ٧ × ٥ ب ٩ × (−٢) + ٧ × (−٣) ج ٦ × ٥ + ٤ × (−٨) د ١١ × ٣ − (−٣ × ٧) هـ −٩ × ١٧ − (−٢ × (−١٣))
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحل معادلة خطية	٢) أوجد قيمة ك حيث أ ٣ك − ٤ = ك + ١٥٠ ب $\frac{١}{ك}\left(\frac{١}{٢} \times ٩ + \frac{٢}{٣} \times (−٥)\right) = ١$

المفردات

المصفوفة matrix

رتبة المصفوفة order of a matrix

صفوف rows

أعمدة columns

عنصر element

مصفوفة صفية row matrix

مصفوفة عمودية column matrix

مصفوفة مربعة square matrix

المصفوفة الصفرية zero matrix

إبدالية commutative

العدد القياسي scalar

غير إبدالية not commutative

المصفوفة المحايدة identity matrix

محدد determinant

القطر الرئيسي major diagonal

القطر الثانوي minor diagonal

منفردة singular

غير منفردة non-singular

معكوس المصفوفة inverse matrix

لماذا ندرس المصفوفات؟

تستخدم المصفوفات على نطاق واسع في الحياة الواقعية والعمليات الحاسوبية، مثل الانعكاس والانكسار في الرسوم والنمذجة الحاسوبية لاحتمالات توقع الطقس.

كما يمكن استخدامها أيضًا لتمثيل المعلومات مثل إحداثيات نقطة في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

سوف تتعلّم في هذه الوحدة أنواعًا خاصة من المصفوفات، والعمليات على المصفوفات وكذلك محدد ومعكوس المصفوفة.

٧-١ رتبة المصفوفة وأنواع المصفوفات

المصفوفة matrix هي ترتيب للقيم في شكل صفوف وأعمدة داخل أقواس، ويُرمز إليها بأحد الأحرف التي تحتها خط، مثل أ

رتبة المصفوفة

تحدد **رتبة المصفوفة order of a matrix** من خلال عدد **الصفوف** (ص) وعدد **الأعمدة** (ع).

نشير إلى المصفوفة من خلال رتبتها. فالمصفوفة ذات الرتبة ص × ع تحتوي على ص صف، ع عمود.

فمثلًا أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة رتبتها ٢ × ٣ لأن فيها صفين وثلاثة أعمدة.

في أ، **العنصر** ٥ يقع في الصف الأول والعمود الأول، والعنصر ٤ يقع في الصف الثاني والعمود الثالث.

للرتبة أهمية كبيرة في تقرير إمكانية إجراء عمليات جمع أو طرح أو ضرب المصفوفات.

أنواع المصفوفات

للمصفوفات عدة أنواع منها:

- **المصفوفة الصفية row matrix**: تتكوّن من صف واحد فقط، وأي عدد من الأعمدة.

  فمثلًا أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفية من الرتبة ١ × ٥ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفية من الرتبة ١ × ٣

- **المصفوفة العمودية column matrix**: تتكوّن من عمود واحد فقط، وأي عدد من الصفوف.

  فمثلًا ج = $\begin{pmatrix} ٧ \\ -٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة عمودية من الرتبة ٢ × ١ ، د = $\begin{pmatrix} ٧ \\ -١ \\ ٠٫٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة عمودية من الرتبة ٣ × ١

- **المصفوفة المربعة square matrix**: تتكوّن من عدد متساوٍ من الصفوف والأعمدة.

  فمثلًا هـ = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ لأن فيها صفين وعمودين.

  ن = $\begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ٥ & -٤ & ٠ \\ -٧ & ٣ & -٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣ × ٣ لأن فيها ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

- **المصفوفة الصفرية zero matrix**: يمكن أن تكون من أي رتبة، إلا أن كل عناصرها تساوي الصفر

فمثلًا $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية وهي أيضًا مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢

المصفوفات المتساوية

تكون المصفوفتان متساويتين إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت كل العناصر المتناظرة متساوية.

على سبيل المثال، إذا كانت $\begin{pmatrix} ٢ & أ \\ ب & ٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ج & ٦ \\ ٠,٥ & د \end{pmatrix}$

يجب أن تكون العناصر في المواقع المتناظرة متساوية، أي أن أ = ٦ ، ب = ٠,٥ ، ج = ٢ ، د = -٣

نتيجة ١

- تكتب رتبة المصفوفة التي فيها ص صفًا، ع عمودًا في صورة ص × ع
- المصفوفة الصفية: تتكوّن من صف واحد وأي عدد من الأعمدة.
- المصفوفة العمودية: تتكوّن من عمود واحد وأي عدد من الصفوف.
- المصفوفة المربعة: تتكوّن من عدد متساو من الصفوف والأعمدة.
- المصفوفة الصفرية: كل عناصرها تساوي الصفر.
- المصفوفات المتساوية: تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما الرتبة نفسها وكانت كل عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثــال ١

أعط وصفًا كاملًا لكل من المصفوفات الآتية:

$\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\underline{و} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٥- \end{pmatrix}$ ، $\underline{م} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٥- & ٣ \end{pmatrix}$

الحــلّ:

$\underline{ل}$ مصفوفة صفية من ثلاثة عناصر ورتبتها ١ × ٣ وهي أيضًا مصفوفة صفرية لأن كل عناصرها مساوية للصفر.

$\underline{و}$ مصفوفة عمودية من عنصرين ورتبتها ٢ × ١

$\underline{م}$ مصفوفة مربعة من أربعة عناصر ورتبتها ٢ × ٢

مثــال ٢

المصفوفة أ مصفوفة مربعة وصفرية. أوجد قيمتَي س، ص

$$\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} 0 & \text{س} + 7 \\ \text{٤ص} + 8 & 0 \end{pmatrix}$$

الحــلّ:

كل عناصر المصفوفة أ مساوية للصفر، لذا:

س + ٧ = ٠ ← س = −٧

٤ ص + ٨ = ٠ ← ص = −٢

مثــال ٣

لدينا المصفوفة ت = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

أ ما هو العنصر الذي موقعه الصف الثاني، والعمود الثالث في المصفوفة ت؟

ب صف موقع العنصر −٢

الحــلّ:

أ

$$\begin{array}{cc} & \text{العمود الثالث} \\ & \downarrow \\ \text{الصف الثاني} \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & \boxed{-5} \end{pmatrix} \end{array}$$

العنصر الذي موقعه الصف الثاني، والعمود الثالث هو −٥

ب

$$\begin{array}{cc} & \text{العمود الثاني} \\ & \downarrow \\ \text{الصف الأول} \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & \boxed{-2} & 4 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

العنصر −٢ في الصف الأول، والعمود الثاني.

مثــال ٤

المصفوفتان $\begin{pmatrix} \text{س} + 2 & -5 \\ 7 & \text{٢ص} - 3 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}$ متساويتان.

أوجد قيمتَي س، ص

الحــلّ:

العناصر في المواقع المتناظرة متساوية، لذا:

س + ٢ = ١٠ ← س = ٨

٢ص − ٣ = −١١ ← ٢ص = −٨ وبالتالي ص = −٤

تمارين ٧-١

١) أجب عن الأسئلة الآتية باستخدام المصفوفات المعطاة:

$$\underline{أ} = \begin{pmatrix} -١ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} ،\ \underline{ب} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ١ \end{pmatrix} ،\ \underline{ج} = \begin{pmatrix} ٩ & -٤ \end{pmatrix} ،\ \underline{د} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ٨ \end{pmatrix} ،\ \underline{هـ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} ،\ \underline{و} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

أ) ما نوع هـ؟

ب) ما نوع المصفوفة أ؟

ج) أي المصفوفات مصفوفة عمودية؟

د) ما المشترك بين المصفوفة أ والمصفوفة د؟

هـ) ما هي رتبة كل مصفوفة؟

و) ما هو العنصر في الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة د؟

ز) صِف موقع العنصر ٣ في المصفوفة أ

٢) المصفوفتان $\underline{ل} = \begin{pmatrix} أ + ٧ & ١٢ \\ ٩ & ب - ٤ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٨ & -٣ج \\ ٢د - ١ & ٩ \end{pmatrix}$ متساويتان. أوجد قيم أ، ب، ج، د

٣) المصفوفتان $\begin{pmatrix} ٢س - ٣ \\ ٧ - ٤ص \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} س + ٣ \\ ٩ - ٨ص \end{pmatrix}$ متساويتان. أوجد قيمتَي س، ص

٤) إذا علمت أن المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢١ - ٣ل & ٠ \\ ٠ & ١٠ + ٥ق \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية، فأوجد قيمتَي ل، ق

٥) أ) في المصفوفة ل: ٨ صفوف، ٩ أعمدة. ما عدد العناصر في المصفوفة ل؟

ب) في المصفوفة ن: ٢٨ عنصرًا مرتبة في ٤ صفوف. ما عدد الأعمدة في المصفوفة ن؟

ج) في المصفوفة ر: ٤٩ عنصرًا. ماذا يمكن أن يكون نوع المصفوفة ر؟ اشرح إجابتك.

٧-٢ جمع وطرح المصفوفات

استكشف ١

١) تناقش مع أحد زملائك في الصف حول المصفوفات الآتية التي يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح عليها والتي لا يمكن إجراء ذلك:

أ $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٤ & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ \\ -٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٩ & -٨ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$

٢) في الحالات التي يمكن فيها الجمع والطرح، ناقش ما سيكون عليه الناتج.

نتيجة ٢

إذا كانت $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$ مصفوفتين من الرتبة ن × م، فإن:

- ناتج جمعهما ($\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$) هو مصفوفة من الرتبة ن × م أيضًا، وينتج كل عنصر فيها من جمع العنصرين المناظرين له في $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} + \text{هـ} & \text{ب} + \text{و} \\ \text{ج} + \text{ز} & \text{د} + \text{ح} \end{pmatrix}$$

- ناتج طرحهما ($\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}}$) هو مصفوفة من الرتبة ن × م أيضًا، وينتج كل عنصر فيها من طرح العنصرين المناظرين له في $\underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}}$

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} - \text{هـ} & \text{ب} - \text{و} \\ \text{ج} - \text{ز} & \text{د} - \text{ح} \end{pmatrix}$$

مثـــال ٥

باستخدام المصفوفات المعطاة:

$\underline{أ} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\underline{ج} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

أوجد:

أ $\underline{أ} + \underline{ب}$

ب $\underline{ب} + \underline{أ}$

ج $\underline{ج} + \underline{د}$

د $\underline{ج} - \underline{د}$

هـ $\underline{أ} + \underline{ج}$

الحــلّ:

أ $\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + (-3) & 5 + 1 & 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

ب $\underline{ب} + \underline{أ} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 9 & 1 + 5 & 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

لاحظ أن إجابتَي $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{ب} + \underline{أ}$ متساويتان، أي أن $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$

ج $\underline{ج} + \underline{د} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 0 & -1 + (-6) \\ 2 + (-1) & 7 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

د $\underline{ج} - \underline{د} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 0 & -1 - (-6) \\ 2 - (-1) & 7 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

هـ $\underline{أ} + \underline{ج}$: لا يمكن إجراء هذا الجمع لأن رتبة المصفوفة $\underline{أ}$ لا تساوي رتبة المصفوفة $\underline{ج}$

نتيجة ٣

جمع المصفوفات عملية **إبدالية** **commutative**، أي أن $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$

تمارين ٧-٢

١) أوجد مصفوفة الناتج إن أمكن:

أ) $\begin{pmatrix}-٥\\ ٧\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٧\\ -٥\end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix}٨ & ٠ & ١١\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٤ & -٣ & -١\end{pmatrix}$

ج) $\begin{pmatrix}١٠\\ -٩\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٢٠ & ٩\end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix}٤ & ٢\\ -٤ & ١\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٥ & -٦\\ ٧ & ٣\end{pmatrix}$

هـ) $\begin{pmatrix}١,٥ & ٢,٨\\ -٦,٣ & -٠,٧\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}٣,٥ & ٤,٢\\ ٨,١ & -١,٧\end{pmatrix}$

و) $\begin{pmatrix}١ & -٥\\ ٧ & ١٠\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-٥ & ٦\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}$

ز) $\begin{pmatrix}٠,٦ & -١,٩\\ -٢,٧ & ٠,٥\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-٢ & ١,٧\\ ٠ & -٠,٢\end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن $\begin{pmatrix}١١ & ٨\\ -٦ & -٩\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{أ} & \text{ب}+٢\\ \text{ج} & ٢\text{د}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}٨ & ٨\\ ٩ & ٧\end{pmatrix}$، فأوجد قيم أ، ب، ج، د

٣) إذا علمت أن $\begin{pmatrix}\text{ل} & -٥\\ ١٧ & ٣\text{ر}-٤\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}٧ & \text{ق}\\ \text{ت}+٩ & ١٥\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-٦ & ٣\\ -٥ & ٢\end{pmatrix}$، فأوجد قيم ل، ق، ر، ت

٤) إذا علمت أن $\underline{\text{أ}}=\begin{pmatrix}٢ & -٣\\ ١ & ٤\end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}}=\begin{pmatrix}١٢ & ١٨\\ ١٣ & ٧\end{pmatrix}$

فأوجد كل مصفوفة من المصفوفتين الآتيتين:

أ) $\underline{\text{أ}}+\underline{\text{أ}}$

ب) $\underline{\text{ب}}+\underline{\text{ب}}+\underline{\text{ب}}-\underline{\text{أ}}$

٥) لدينا المصفوفتان $\underline{\text{ل}}=\begin{pmatrix}١٥ & ١٢\\ -٩ & ٢١\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{و}}=\begin{pmatrix}\text{أ} & \text{ب}\\ ٢\text{ج} & ٤\text{د}\end{pmatrix}$، كما لدينا $\underline{\text{ل}}+\underline{\text{ل}}-\underline{\text{و}}=\begin{pmatrix}١٠ & ١٠\\ ٢٠ & ٥٠\end{pmatrix}$

أوجد قيم أ، ب، ج، د

٧-٣ ضرب المصفوفات

سنتعلم في هذا الدرس ضرب مصفوفة في عدد، وضرب مصفوفة في أخرى.

٧-٣أ الضرب القياسي

- يمكن ضرب مصفوفة في عدد، يسمى العدد المستخدم لضرب المصفوفة **بالعدد القياسي**.
- العدد القياسي يمكن أن يكون أي عدد حقيقي.
- يوضع العدد القياسي في عملية الضرب على يمين المصفوفة.
- عند ضرب عدد في مصفوفة فإن ذلك العدد يضرب في جميع عناصر المصفوفة.

$$ك \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك \times أ \\ ك \times ب \end{pmatrix}$$

مثلًا: لنضرب $\underline{ف} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ & ٠ \\ ٧ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$ في العدد القياسي ٦، نكتب:

$$٦\,\underline{ف} = ٦ \begin{pmatrix} ٤ & -٢ & ٠ \\ ٧ & ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \times ٤ & ٦ \times (-٢) & ٦ \times ٠ \\ ٦ \times ٧ & ٦ \times ٣ & ٦ \times ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ & -١٢ & ٠ \\ ٤٢ & ١٨ & ٦ \end{pmatrix}$$

لنضرب $\underline{ن} = \begin{pmatrix} ٨ & -٧ \\ ١٢ & ٢٠ \end{pmatrix}$ في العدد القياسي $\frac{١}{٢}$ ، نكتب

$$\frac{١}{٢}\,\underline{ن} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٨ & -٧ \\ ١٢ & ٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} \times ٨ & \frac{١}{٢} \times (-٧) \\ \frac{١}{٢} \times ١٢ & \frac{١}{٢} \times ٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -\frac{٧}{٢} \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix} \text{ أو } \begin{pmatrix} ٤ & -٣{,}٥ \\ ٦ & ١٠ \end{pmatrix}$$

إذا كان العدد القياسي صفرًا (٠) يكون الناتج مصفوفة صفرية، على سبيل المثال:

$$٠ \times \begin{pmatrix} ٥ \\ -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

كذلك يمكن كتابة أي مصفوفة في صورة حاصل ضرب عدد قياسي في مصفوفة أخرى، وذلك بأخذ عامل مشترك لعناصر المصفوفة.

مثلًا، يمكننا أخذ ٣ كعامل مشترك لعناصر المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١٢ \\ -٩ & ١٥ \end{pmatrix}$

$$\therefore \underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ \times ١ & ٣ \times ٤ \\ ٣ \times (-٣) & ٣ \times ٥ \end{pmatrix} = ٣ \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$$

مثـــال ٦

لدينا المصفوفتان $\underline{\text{س}} = \begin{pmatrix} ٦ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ص}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -٧ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة

أ $٣\underline{\text{س}} + ٢\underline{\text{ص}}$

ب $\frac{١}{٢}\underline{\text{س}} - ٣\underline{\text{ص}}$

الحـــلّ:

أ $٣\underline{\text{س}} + ٢\underline{\text{ص}} = ٣\begin{pmatrix} ٦ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -٧ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٨ & -٣٠ & ١٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٦ & ١٠ & -١٤ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٤ & -٢٠ & -٢ \end{pmatrix}$

ب $\frac{١}{٢}\underline{\text{س}} - ٣\underline{\text{ص}} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٦ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -٧ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٩ & ١٥ & -٢١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٦ & -٢٠ & ٢٣ \end{pmatrix}$

مُساعَدة

يمكن كتابة $\begin{pmatrix} ٢٤ & -٢٠ & -٢ \end{pmatrix}$ على الشكل
$٢\begin{pmatrix} ١٢ & -١٠ & -١ \end{pmatrix}$ أو
$-٢\begin{pmatrix} -١٢ & ١٠ & ١ \end{pmatrix}$

مثـــال ٧

إذا كان $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{ف} & \text{س} \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ١٣ & -٧ \\ \text{ص} & \text{غ} \end{pmatrix}$، $٢\underline{\text{أ}} + ٣\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٥١ & -٢٧ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$، فأوجد القيم ف، س، ص، غ

الحـــلّ:

$٢\underline{\text{أ}} + ٣\underline{\text{ب}} = ٢\begin{pmatrix} \text{ف} & \text{س} \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} + ٣\begin{pmatrix} ١٣ & -٧ \\ \text{ص} & \text{غ} \end{pmatrix}$ اضرب العناصر في العدد القياسي

$= \begin{pmatrix} ٢\text{ف} & ٢\text{س} \\ ٠ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٩ & -٢١ \\ ٣\text{ص} & ٣\text{غ} \end{pmatrix}$ اجمع المصفوفتين

$= \begin{pmatrix} ٢\text{ف} + ٣٩ & ٢\text{س} - ٢١ \\ ٣\text{ص} & ٨ + ٣\text{غ} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٢\text{ف} + ٣٩ & ٢\text{س} - ٢١ \\ ٣\text{ص} & ٨ + ٣\text{غ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥١ & -٢٧ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

ينتج من هذا أربع معادلات للحل:

$٢\text{ف} + ٣٩ = ٥١ \longleftarrow \text{ف} = ٦$

$٢\text{س} - ٢١ = -٢٧ \longleftarrow \text{س} = -٣$

$٣\text{ص} = ٣ \longleftarrow \text{ص} = ١$

$٨ + ٣\text{غ} = -٤ \longleftarrow \text{غ} = -٤$

تمارين ٧-٣أ

١) أوجد ناتج ما يلي:

أ $٢\begin{pmatrix}٣\\٤\end{pmatrix}$ ب $٥\begin{pmatrix}٢ & -٢ & ٦\end{pmatrix}$ ج $٧\begin{pmatrix}١ & ٣\\ ٠ & -٢\end{pmatrix}$

د $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix}١٢ & ٨ & ٠\\ -٢ & ١٠ & ٩\end{pmatrix}$ هـ $-٤\begin{pmatrix}-٢\\ -٣\end{pmatrix}$

٢) في المصفوفات المدرجة أدناه:

$\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix}٣\\ -٢\\ ٩\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix}٠ & ٤\\ ٢ & -١٢\\ -١٤ & ٣\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ج}} = \begin{pmatrix}-٨\\ ١\\ ٦\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{د}} = \begin{pmatrix}٤ & -٧\\ ٣ & -٢\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{هـ}} = \begin{pmatrix}-٦ & ١\\ ٠ & -٥\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{و}} = \begin{pmatrix}١٢ & ٠ & ٣\\ -٣ & ٦ & -١٥\end{pmatrix}$

أوجد ناتج ما يلي إن أمكن:

أ $٢\underline{\text{أ}} - \begin{pmatrix}١١\\ -٣\\ ٣\end{pmatrix}$ ب $٣\underline{\text{د}} + \begin{pmatrix}-٢ & ١٣\\ -٦ & ٩\end{pmatrix}$ ج $٢\underline{\text{ب}} + \underline{\text{و}}$ د $٢\underline{\text{ج}} + ٣\underline{\text{أ}}$

هـ $٥\underline{\text{هـ}} - ٣\underline{\text{د}}$ و $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ج}} + \frac{١}{٢}\underline{\text{ب}}$ ز $\frac{٢}{٣}\underline{\text{و}}$

٣) $\underline{\text{ل}} = \begin{pmatrix}٢٥ & -٣٠\\ -١٥ & ٥\end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix}-٨ & ٦\\ ٤ & -١٢\end{pmatrix}$ أوجد:

أ $٢\underline{\text{ن}} + \begin{pmatrix}٣٣ & -٣٦\\ -١٩ & ١٧\end{pmatrix}$ ب $\underline{\text{ن}} - ٢\underline{\text{ل}}$ ج $\frac{١}{٥}\underline{\text{ل}} + \frac{١}{٢}\underline{\text{ن}}$ د $\frac{٣}{٤}\underline{\text{ن}} - \frac{٤}{٥}\underline{\text{ل}}$

٤) أوجد في كل ممّا يلي قيمة العدد القياسي ك:

أ $\begin{pmatrix}٦ & -١٦\\ -١٠ & -٨\end{pmatrix} = \text{ك}\begin{pmatrix}٩ & -٢٤\\ -١٥ & -١٢\end{pmatrix}$

ب $\begin{pmatrix}١٨ & ٥١\\ -٩ & -٢٥{,}٥\end{pmatrix} = \text{ك}\begin{pmatrix}١{,}٢ & ٣{,}٤\\ -٠{,}٦ & -١{,}٧\end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix}-٦ & ٥{,}١\\ ٩ & -٠{,}٢٧\end{pmatrix} = \text{ك}\begin{pmatrix}٤ & -٣{,}٤\\ -٦ & ٠{,}١٨\end{pmatrix}$

٥) أ أوجد قيمَتي س، ص إذا كان $\begin{pmatrix} ٢س \\ ٧ \end{pmatrix} + ٤ \begin{pmatrix} ٥ \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٦ \\ ٢٥ \end{pmatrix}$

ب أوجد قيم أ، ب، جـ إذا كان $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} أ & -٨ & ١٢ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٩ & -ب & ٣جـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٢١ \end{pmatrix}$

ج أوجد قيم ل ، ق، ر، ز إذا كان $\begin{pmatrix} -١٣ & ق \\ ٩ & ز \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٦ & ١ \\ ر & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ل & ٣ \\ ١٥ & ٤ز \end{pmatrix}$

٦) في المصفوفات $\underline{س} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -٥ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{pmatrix} ٤ & ١٥ \\ -٣ & جـ \end{pmatrix}$ ، $\underline{غ} = \begin{pmatrix} ٩ & -٦ \\ د & ٥ \end{pmatrix}$

أوجد قيم أ، ب، جـ، د إذا كان $٤\underline{س} + ٣\underline{ص} - ٢\underline{غ} = ٢\begin{pmatrix} ١١ & ٢٤ \\ -١٤ & ٢ \end{pmatrix}$

٧-٣ب ضرب مصفوفة بأخرى

استكشف ٢

يمكننا ضرب مصفوفتَين إحداهما في الأخرى للحصول على مصفوفة ثالثة. ناقش مع زميل لك الأمثلة الثلاثة الآتية ووضح كيف تم التوصل إلى عناصر مصفوفة الناتج.

$$\begin{pmatrix}٥ & ١\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١٠ \\ ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥١\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}٩ & ٢ & ٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}١٠ \\ ١ \\ ٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٩٨\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}١ & ١ \\ ١٠ & ١٠\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢ & ٢ \\ ٣ & ٣\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥ & ٥ \\ ٥٠ & ٥٠\end{pmatrix}$$

يمكننا كتابة ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب على الشكل (أ × ب) أو (أ ب)

يمكن ضرب مصفوفتين أ و ب وإيجاد (أ ب) فقط إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة أ مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة ب، نأخذ الأمثلة الآتية:

يمكن ضرب $\begin{pmatrix}٢ & ٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٤ \\ ٥\end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ١ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ٢ × ١

يمكن ضرب $\begin{pmatrix}٤ \\ ٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢ & ٣\end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ١ والمصفوفة الثانية من الرتبة ١ × ٢

يمكن ضرب $\begin{pmatrix}١ & ٢ \\ ٣ & ٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٥ & ٦ \\ ٧ & ٨\end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ٢ × ٢

لا يمكن ضرب $\begin{pmatrix}١ & ٢ \\ ٣ & ٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٧ & ٨ & ٩\end{pmatrix}$ لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ١ × ٣

إن تحقق شرط الضرب فإن المصفوفة الناتجة تكون مصفوفة جديدة فيها العدد نفسه لصفوف المصفوفة الأولى والعدد نفسه لأعمدة المصفوفة الثانية.

رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب $\begin{pmatrix}٢ & ٣\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٤ \\ ٥\end{pmatrix}$ هي ١ × ١

رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب $\begin{pmatrix}٤ \\ ٥\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢ & ٣\end{pmatrix}$ هي ٢ × ٢

رتبة المصفوفة الناتجة من ضرب $\begin{pmatrix}١ & ٢ \\ ٣ & ٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٥ & ٦ \\ ٧ & ٨\end{pmatrix}$ هي ٢ × ٢

لضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى، نتبع الخطوات الآتية:

١) تحقق من أن عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

٢) اضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب لتحصل على العنصر في الصف الأول، العمود الأول في المصفوفة الناتجة.

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ل} & \square \\ \text{ق} & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أل + ب ق} & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

اضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى في عناصر العمود الثاني من المصفوفة الثانية، ثم أوجد مجموع نواتج الضرب لتحصل على العنصر في الصف الأول، والعمود الثاني في المصفوفة الناتجة.

$$\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \text{ر} \\ \square & \text{ت} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \text{أر + ب ت} \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

استمر بإجراء الضرب بالطريقة نفسها حتى تكون قد ضربت كل الصفوف من المصفوفة الأولى في كل الأعمدة من المصفوفة الثانية، وأوجدت مجموع كل نواتج الضرب.

نتيجة ٤

إذا كان $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{ل} & \text{ق} \\ \text{ر} & \text{ت} \end{pmatrix}$، يكون ضرب المصفوفة

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ل} & \text{ق} \\ \text{ر} & \text{ت} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ} \times \text{ل} + \text{ب} \times \text{ر} & \text{أ} \times \text{ق} + \text{ب} \times \text{ت} \\ \text{ج} \times \text{ل} + \text{د} \times \text{ر} & \text{ج} \times \text{ق} + \text{د} \times \text{ت} \end{pmatrix}$$ أو

$$\begin{pmatrix} \text{أل + ب ر} & \text{أ ق + ب ت} \\ \text{ج ل + د ر} & \text{ج ق + د ت} \end{pmatrix}$$

إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ هي ر × جـ، ورتبة المصفوفة $\underline{\text{ب}}$ هي ل × ق، يتحقق الضرب $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}$ فقط عندما يكون جـ = ل، في هذه الحالة تكون رتبة المصفوفة $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}$ هي ر × ق

مثــال ٨

لتكن المصفوفتان:

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}، \quad ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$$

أ أوجد ناتج أ ب ثم حدد موقع كل عنصر في المصفوفة الناتجة.

ب أوجد ناتج ب أ

الحــلّ:

أ

$$\underset{أ}{\overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}}} \underset{ب}{\overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} ١ \times ٣ + ٤ \times ٤ & ١ \times ٢ + ٤ \times ١ \\ ٣ \times ٣ + ٢ \times ٤ & ٣ \times ٢ + ٢ \times ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ١٦ & ٢ + ٤ \\ ٩ + ٨ & ٦ + ٢ \end{pmatrix} = \underset{أ ب}{\overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ١٩ & ٦ \\ ١٧ & ٨ \end{pmatrix}}}$$

يبيّن الجدول الآتي كيف حصلنا على العناصر الأربعة في المصفوفة الناتجة أ ب

يدلنا الصف في أ والعمود في ب المستخدمان في إيجاد عناصر أ ب على مواقع هذه العناصر فيها.

العنصر في أ ب	صف في أ × عمود في ب	موقع العنصر في أ ب
١٩	أول صف في أ × أول عمود في ب	أول صف، أول عمود
٦	أول صف في أ × ثاني عمود في ب	أول صف، ثاني عمود
١٧	ثاني صف في أ × أول عمود في ب	ثاني صف، أول عمود
٨	ثاني صف في أ × ثاني عمود في ب	ثاني صف، ثاني عمود

ب لإيجاد المصفوفة ب أ، نرتب المصفوفتَين بهذا الترتيب (ب أولًا، أ ثانيًا) ثم نقوم بالعمليات المطلوبة على العناصر كما يأتي:

$$\underset{ب}{\overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}}} \underset{أ}{\overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} ٣ \times ١ + ٢ \times ٣ & ٣ \times ٤ + ٢ \times ٢ \\ ٤ \times ١ + ١ \times ٣ & ٤ \times ٤ + ١ \times ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٦ & ١٢ + ٤ \\ ٤ + ٣ & ١٦ + ٢ \end{pmatrix} = \underset{ب أ}{\overset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ٩ & ١٦ \\ ٧ & ١٨ \end{pmatrix}}}$$

يمكن أن تكون قد توقعت في المثال (٨) أعلاه أن تكون نتيجة ضرب أ ب هي ذاتها نتيجة ضرب ب أ غير أن الأمر ليس كذلك.

مُساعَدة

في بعض الحالات الخاصة لا يتغير ناتج الضرب بين مصفوفتَين بعد تبديل موقعَيهما. سوف نجد هذه الحالات عندما ندرس المصفوفة المحايدة في نهاية هذا الدرس.

نتيجة ٥

ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية **not commutative** لأن أ ب $\neq$ ب أ بشكل عام.

مثــال ٩

المصفوفتان $\underline{\text{ل}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{و}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$

أ عمليتا الضرب ل و، و ل ممكنتان. اشرح السبب، ثم أوجد رتبتَيهما.

ب أوجد ل و ، و ل

الحــلّ:

أ يوجد في ل عمودان وفي و صفان، إذًا ل و ممكن ورتبته ١ × ١

يوجد في و عمود واحد وفي ل صف واحد، إذًا و ل ممكن ورتبته ٢ × ٢

ب

$$\underset{١ \times ٢}{\underline{\text{ل}}}\ \underset{٢ \times ١}{\underline{\text{و}}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \times ٣ + ٢ \times ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٨ \end{pmatrix} = \underset{١ \times ١}{\begin{pmatrix} ١١ \end{pmatrix}}$$

$$\underset{٢ \times ١}{\underline{\text{و}}}\ \underset{١ \times ٢}{\underline{\text{ل}}} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \times ١ & ٣ \times ٢ \\ ٤ \times ١ & ٤ \times ٢ \end{pmatrix} = \underset{٢ \times ٢}{\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix}}$$

مثــال ١٠

المصفوفتان المربعتان $\underline{\text{غ}} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

أ أوجد غ ن

ب أوجد ن غ

ج بيّن أن غ ن − ن غ ليست مصفوفة صفرية.

الحــلّ:

أ

$$\underline{\text{غ}}\,\underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ \times ١ + (-٢) \times (-١) & ٣ \times ٥ + (-٢) \times ٠ \\ ٢ \times ١ + ١ \times (-١) & ٢ \times ٥ + ١ \times ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ + ٢ & ١٥ + ٠ \\ ٢ - ١ & ١٠ + ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & ١٥ \\ ١ & ١٠ \end{pmatrix}$$

ب $\underline{ن}\,\underline{غ} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ١ \times ٣ + ٥ \times ٢ & ١ \times (-٢) + ٥ \times ١ \\ -١ \times ٣ + ٠ \times ٢ & -١ \times (-٢) + ٠ \times ١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ + ١٠ & -٢ + ٥ \\ -٣ + ٠ & ٢ + ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٣ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

ج $\underline{غ}\,\underline{ن} - \underline{ن}\,\underline{غ} = \begin{pmatrix} ٥ & ١٥ \\ ١ & ١٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٣ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -٨ & ١٢ \\ ٤ & ٨ \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

المصفوفة المحايدة ٢ × ٢

المصفوفة المحايدة identity matrix التي غالبًا ما نعبّر عنها بـ $\underline{م}$، تتعامل مع المصفوفات كما يتعامل العدد ١ في الضرب مع باقي الأعداد. عندما نضرب أي عدد في واحد من أي جهة، فإن هذا العدد يبقى كما هو: ١ × ٥ = ٥ × ١ = ٥

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢ هي $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

عندما نضرب المصفوفة $\underline{أ}$ في المصفوفة المحايدة $\underline{م}$، لا يطرأ أي تغيير على $\underline{أ}$

عندما نضرب المصفوفة المحايدة $\underline{م}$ في المصفوفة $\underline{أ}$، لا يطرأ أي تغيير على $\underline{أ}$

ما يعني أن $\underline{م}\,\underline{أ} = \underline{أ}\,\underline{م} = \underline{أ}$

لنضرب المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}$ في المصفوفة المحايدة $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$$\underline{م}\,\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٠ & ١ + ٠ \\ ٠ + ٧ & ٠ - ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix} = \underline{أ}$$

$$\underline{أ}\,\underline{م} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ + ٠ & ٠ + ١ \\ ٧ + ٠ & ٠ - ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix} = \underline{أ}$$

النتيجتان متساويتان: $\underline{م}\,\underline{أ} = \underline{أ}\,\underline{م} = \underline{أ}$

نتيجة ٦

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢، $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ حيث $\underline{م}\,\underline{أ} = \underline{أ}\,\underline{م} = \underline{أ}$

وعند ضرب $\underline{م}$ في العدد القياسي ك يعطي

$$ك\,\underline{م} = ك \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك & ٠ \\ ٠ & ك \end{pmatrix}$$

مثـــال ١١

إذا كان $٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -جـ & ٤د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$، فأوجد قيم أ، ب، جـ، د

الحـــلّ:

$$٢ \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -جـ & ٤د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

استخدم $\underline{م}\,\underline{أ} = \underline{أ}$، إذًا $ك\,\underline{م}\,\underline{أ} = ك\,\underline{أ}$

$$٢ \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -جـ & ٤د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

اضرب الطرف الأيمن في العدد القياسي ٢

$$\begin{pmatrix} ٨ & ١٤ \\ -٦ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ -جـ & ٤د \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

اجمع المصفوفتَين إلى اليسار

$$\begin{pmatrix} ٨ & ١٤ \\ -٦ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ + ١ & ب - ٢ \\ -جـ + ٣ & ٤د \end{pmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان متساويتَين، يكون كل عنصر في المصفوفة الأولى مساويًا للعنصر الذي يناظره في المصفوفة الثانية، والذي يعطينا أربع معادلات للحل:

٨ = أ + ١ ← أ = ٧

١٤ = ب − ٢ ← ب = ١٦

−٦ = − جـ + ٣ ← جـ = ٩

−٢ = ٤ د ← د = −٠,٥

تمارين ٧-٣ب

١) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب الآتية:

أ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} -7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هـ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

٢) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب الآتية:

أ $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & -6 \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 4 \end{pmatrix}$ هـ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$

ز $5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.7 \\ 3.6 \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

مُساعَدة

قبل إجراء عملية الضرب عليك التحقق من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوٍ لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

٣) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب الآتية:

أ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

د $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ هـ $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

٤) أوجد المصفوفة الناتجة من عمليات الضرب في كل حالة:

أ $\underline{\text{أ}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$، أوجد $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}$

ب $\underline{\text{ل}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$، $\underline{\text{و}} = 2\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$، أوجد $\underline{\text{ل}}\,\underline{\text{و}}$

ج $\underline{\text{س}} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ص}} = -3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$، أوجد $\underline{\text{س}}\,\underline{\text{ص}}$

٥) لدينا :

أ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} & ٢ \\ -٣ & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٣ & -٨ \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمتَي س، ص

ب $\begin{pmatrix} ٢\text{ل} & -٣ \\ ٥ & \text{ق} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٦ \\ ١٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمتَي ل، ق

ج $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{أ} + ١ & -٢ \\ ٥ & \text{ب} - ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦ & ٤ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمتَي أ، ب

د $\begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٤ & -١٢ \\ -٨ & ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{و} & ٢\text{س} \\ \text{ص} - ١ & \text{ع} + ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$ ، أوجد قيم س، ص، ع، و

٦) أ لدينا مصفوفة $\underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$ ، بيّن أن $\underline{\text{ن}}^{٢} \neq \begin{pmatrix} (-١)^{٢} & ٥^{٢} \\ ٤^{٢} & (-٣)^{٢} \end{pmatrix}$

ب أوجد $\underline{\text{ن}}^{٢} - \underline{\text{ن}}$

مُساعَدة

يتم تربيع المصفوفة، بإجراء ضربها في نفسها.

٧) $\underline{\text{أ}}$ مصفوفة صف، $\underline{\text{ب}}$ مصفوفة عمود.

أ ما شروط إيجاد $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}$ و $\underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}}$ ؟

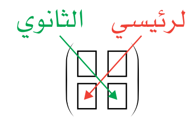
ب إذا تم استيفاء هذه الشروط، فما نوع المصفوفتين $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{ب}}$ و $\underline{\text{ب}}\,\underline{\text{أ}}$؟

٧-٤ محدد المصفوفة من الرتبة ٢ × ٢

لكل مصفوفة مربعة **محدد** **determinant** يفيدنا في تحديد ما إذا كان للمصفوفة معكوس أم لا (ستدرس هذا الأمر في الدرس ٧-٥).

لإيجاد محدد مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢، نحسب الفارق بين ناتج ضرب العناصر في **القطر الرئيسي** **major diagonal** وناتج ضرب العناصر في **القطر الثانوي** **minor diagonal** للمصفوفة.

قطرا المصفوفة المربعة:



إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، فإن محدد $(\underline{\text{أ}})$ = أ د − ب ج

يمكن استخدام رمز Δ للتعبير عن المحدد، كما يمكننا استخدام خطّين رأسيين (| |) لنبيّن أننا في صدد إيجاد محدد المصفوفة.

نتيجة ٧

لكل $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{pmatrix}$، يكون المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{د} \end{vmatrix}$ = أ د − ب ج

مثــال ١٢

أوجد محدد كل من المصفوفات المربعة الآتية:

أ $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$ **ب** $\underline{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٤ & -٧ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$ **ج** $\underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ **د** $\underline{\text{ج}} = ٢ \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

الحــلّ:

أ $|\underline{\text{أ}}| = ٦ \times ٥ - ٣ \times (-٢) = ٣٠ + ٦ = ٣٦$

ب $|\underline{\text{ب}}| = ٤ \times ١ - (-٢ \times -٧) = ٤ - ١٤ = -١٠$

ج $|\underline{\text{م}}| = ١ \times ١ - ٠ \times ٠ = ١$

د $|\underline{\text{ج}}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٦ \\ ١٦ & ١٢ \end{vmatrix} = ٨ \times ١٢ - ٦ \times ١٦ = ٠$

تسمّى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر مصفوفة **منفردة** **singular**.

تسمّى المصفوفة التي محددها لا يساوي الصفر مصفوفة **غير منفردة** **non-singular**.

نتيجة ٨

إذا كان $\Delta = ٠$ ، فإن المصفوفة منفردة.

إذا كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن المصفوفة غير منفردة.

مثــال ١٣

بيّن أن المصفوفة س = $\begin{pmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & أ \end{pmatrix}$ تكون:

أ غير منفردة عندما أ = ٢ ب منفردة عندما أ = ٣

الحــلّ:

أ عندما أ = ٢، |س| = $\begin{vmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = -٤ × ٢ - ٦ × (-٢) = -٨ + ١٢ = ٤ استخدم العنصر أ = ٢

س غير منفردة، لأن |س| ≠ ٠

ب عندما أ = ٣، |س| = $\begin{vmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = -٤ × ٣ - ٦ × (-٢) = -١٢ + ١٢ = ٠ استخدم العنصر أ = ٣

س منفردة، لأن |س| = ٠

تمارين ٧-٤

١) أوجد محدد كل من المصفوفات الآتية:
وحدد ما إذا كانت المصفوفة منفردة أم غير منفردة:

أ ل = $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ب ن = $\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٨ & ١١ \end{pmatrix}$ ج س = $\begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٧ \end{pmatrix}$

د ر = $\begin{pmatrix} -١٢ & ٨ \\ -٧ & ٥ \end{pmatrix}$ هـ ت = $\begin{pmatrix} -٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$ و ى = $\begin{pmatrix} -١٢ & -٩ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix}$

ز ش = $\begin{pmatrix} ٢,٥ & ١,٨ \\ -٢,٤ & -٣,٦ \end{pmatrix}$ ح و = $\begin{pmatrix} ٤ & -٠,٢ \\ -١٥ & ٠,٧٥ \end{pmatrix}$

٢) م مصفوفة محايدة من الرتبة ٢ × ٢، ك عدد قياسي، أوجد محدد ك م

٣) أ ا = $\begin{pmatrix} ٦ & أ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$، Δ ا = ٤، أوجد قيمة أ

ب أوجد قيمة ب إذا كانت ب = ٢ $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & ب \end{pmatrix}$، |ب| = ٥٤

ج أوجد قيمة جـ إذا كانت ع = $\frac{١}{٣}$ $\begin{pmatrix} ٥ & \frac{١}{٢} جـ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة.

د إذا كانت ك = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & د \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة منفردة، فأوجد قيمة د

هـ لدينا هـ = $\begin{pmatrix} س & ص \\ -٤ & ٩ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$، هـ مصفوفة منفردة، اكتب ص بدلالة س

٧-٥ معكوس المصفوفة

لكل مصفوفة غير منفردة معكوس يسمى **معكوس المصفوفة inverse matrix**.

يُكتب معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ على الشكل $\underline{\text{أ}}^{-١}$

ضرب المصفوفة في معكوسها يساوي المصفوفة المحايدة $\underline{\text{م}}$ بغض النظر عن ترتيب هذا الضرب. بعبارة أخرى: $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{أ}}^{-١} = \underline{\text{أ}}^{-١}\,\underline{\text{أ}} = \underline{\text{م}}$

لإيجاد معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ نتبع الخطوات الآتية:

	الخطوة	النتيجة
١	إيجاد $\|\underline{\text{أ}}\|$	$\|\underline{\text{أ}}\| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٢ \times (-٣) = ١٠$
٢	تبديل العناصر في القطر الرئيسي في $\underline{\text{أ}}$	$\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$
٣	ضرب العناصر في القطر الثانوي في $\underline{\text{أ}}$ في -١	$\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$
٤	ضرب نتيجة الخطوة (٣) في العدد القياسي $\frac{١}{\|\underline{\text{أ}}\|}$	$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠{,}٤ & -٠{,}٢ \\ ٠{,}٣ & ٠{,}١ \end{pmatrix}$

معكوس المصفوفة $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ هو $\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

إذا كانت إجابة معكوس المصفوفة صحيحة، فإن كلا الضربَين $\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{أ}}^{-١}$، $\underline{\text{أ}}^{-١}\,\underline{\text{أ}}$ يجب أن يساوي المصفوفة المحايدة $\underline{\text{م}} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

<u>التحقّق ١:</u>

$$\underline{\text{أ}}\,\underline{\text{أ}}^{-١} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$ الضرب في عدد ما عملية إبدالية

$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ٤ + ٦ & -٢ + ٢ \\ -١٢ + ١٢ & ٦ + ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{١٠}\begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

التحقّق ٢:

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}\frac{١}{١٠} = \underline{أ}^{-١}\,\underline{أ}$$

$$\begin{pmatrix} ٨ - ٨ & ٦ + ٤ \\ ٤ + ٦ & ٣ - ٣ \end{pmatrix}\frac{١}{١٠} =$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ١٠ \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix}\frac{١}{١٠} =$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} =$$

نتيجة ٩

معكوس المصفوفة $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ب & أ \\ د & ج \end{pmatrix}$ (من الرتبة ٢ × ٢) هو

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{أ\,د - ب\,ج}\begin{pmatrix} -ب & د \\ أ & -ج \end{pmatrix}$، حيث أ د − ب ج ≠ ٠

مُساعَدة

ليس للمصفوفة المنفردة معكوس لأن محددها يساوي الصفر، ولا يمكن القسمة على الصفر.

مثــال ١٤

أوجد معكوس كل مصفوفة:

أ) $\underline{ن} = \begin{pmatrix} -٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

ب) $\underline{ل} = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٦ & -٨ \end{pmatrix}$

الحــلّ:

أ) $|\underline{ن}| = \begin{vmatrix} -٧ & ٥ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٣ - (-٧) \times (-٢) = ١$

∴ $\underline{ن}$ غير منفردة ولها معكوس.

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}\frac{١}{١} = \underline{ن}^{-١}$$

ب) $|\underline{ل}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٦ & -٨ \end{vmatrix} = (-٣) \times ٦ - ٢ \times (-٨) = -٢$

∴ $\underline{ل}$ غير منفردة ولها معكوس.

$$\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ١{,}٥ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ -٣ & ٨ \end{pmatrix}\frac{١}{-٢} = \underline{ل}^{-١}$$

استكشف ٣

١) أوجد معكوس المصفوفة المحايدة م = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$، وناقش ما وجدته مع زميلك.

٢) ماذا يمكنك اكتشافه عن معكوس المصفوفة الصفرية $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$؟

تمارين ٧-٥

١) أوجد معكوس كل من المصفوفات الآتية إن أمكن:

أ ي = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ب ش = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٩ & -٥ \end{pmatrix}$ ج و = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٧ & -٤ \end{pmatrix}$

د س = $\begin{pmatrix} -٦ & -١٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ هـ ص = $\begin{pmatrix} -١٨ & -١١ \\ -١٢ & -١٤ \end{pmatrix}$ و غ = $\begin{pmatrix} ١٣ & ١٩ \\ -٦ & -١١ \end{pmatrix}$

٢) إذا علمت أن المصفوفتَين أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٩ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$، ب = $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$.

أ أوجد $أ^{-١}$

ب أوجد $ب^{-١}$

٣) إذا علمت أن المصفوفتَين ل = $\begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$، ن = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

أ أوجد المصفوفة ل − ن

ب أوجد معكوس المصفوفة ل − ن

ج بيّن أن المصفوفة ل + ن ليس لها معكوس.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

رتبة المصفوفات وأنواعها

- المصفوفة هي ترتيب للقيم في شكل صفوف وأعمدة داخل أقواس.
- المصفوفة الصفية تتكوّن من صف واحد وأي عدد من الأعمدة.
- المصفوفة العمودية تتكوّن من عمود واحد وأي عدد من الصفوف.
- المصفوفة المربعة تتكوّن من عدد متساو من الصفوف والأعمدة.
- تكتب رتبة المصفوفة التي فيها ص صف، ع عمود في صورة ص × ع
- المصفوفة الصفرية هي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفرًا.
- تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما الرتبة نفسها وكانت كل عناصرهما المتناظرة متساوية.

الجمع، والطرح، والضرب في عدد قياسي

يمكن أن نجمع أو نطرح مصفوفتَين إذا كان لهما الرتبة نفسها فقط.

عملية الجمع في المصفوفات تبادلية لأن $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$

يضرب العدد القياسي المضروب في المصفوفة بكل عناصرها.

ضرب المصفوفات

إذا كانت رتبة المصفوفة $\underline{أ}$ هي ر × جـ، ورتبة المصفوفة $\underline{ب}$ هي ل × ق، فإن الضرب $\underline{أ}\,\underline{ب}$ ممكن إذا كان جـ = ل فقط، في هذه الحالة، تكون رتبة المصفوفة $\underline{أ}\,\underline{ب}$ هي ر × ق

ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية لأن $\underline{أ}\,\underline{ب} \neq \underline{ب}\,\underline{أ}$ بشكل عام.

المصفوفة المحايدة

المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢، $\underline{م} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ حيث $\underline{م}\,\underline{أ} = \underline{أ}\,\underline{م} = \underline{أ}$

محدد المصفوفة

محدد المصفوفة $\underline{غ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ يساوي أ د − ب ج

المصفوفة التي محددها صفر تسمّى مصفوفة منفردة.

المصفوفة التي محددها لا يساوي الصفر تسمّى مصفوفة غير منفردة.

معكوس المصفوفة غير المنفردة

إذا كانت $\underline{غ} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ فإن معكوسها هو $\underline{غ}^{-١} = \frac{١}{أ\,د - ب\,جـ} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$، حيث أ د − ب ج $\neq$ ٠

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السابعة

١) أ أوجد قيمة ل إذا كان محدد $\begin{vmatrix} \text{ل} - ٥ & ٧ \\ \text{ل} & -١٣ \end{vmatrix} = ٢٢٥$

ب أوجد معكوس المصفوفة $\begin{pmatrix} -١٧ & ٣٨ \\ ٢٤ & -٤٨ \end{pmatrix}$

٢) أوجد قيم أ، ب، جـ، بحيث $\begin{pmatrix} -١ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & \text{أ} \\ ٣ & ٢\text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{جـ} + ٥ & ٣٩ \\ \text{أ} - \text{ب} & ٢\text{جـ} - ٨ \end{pmatrix}$

٣) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} - ٦\underline{\text{م}} = \underline{\text{ن}}$، حيث $\underline{\text{م}}$ المصفوفة المحايدة من الرتبة ٢ × ٢

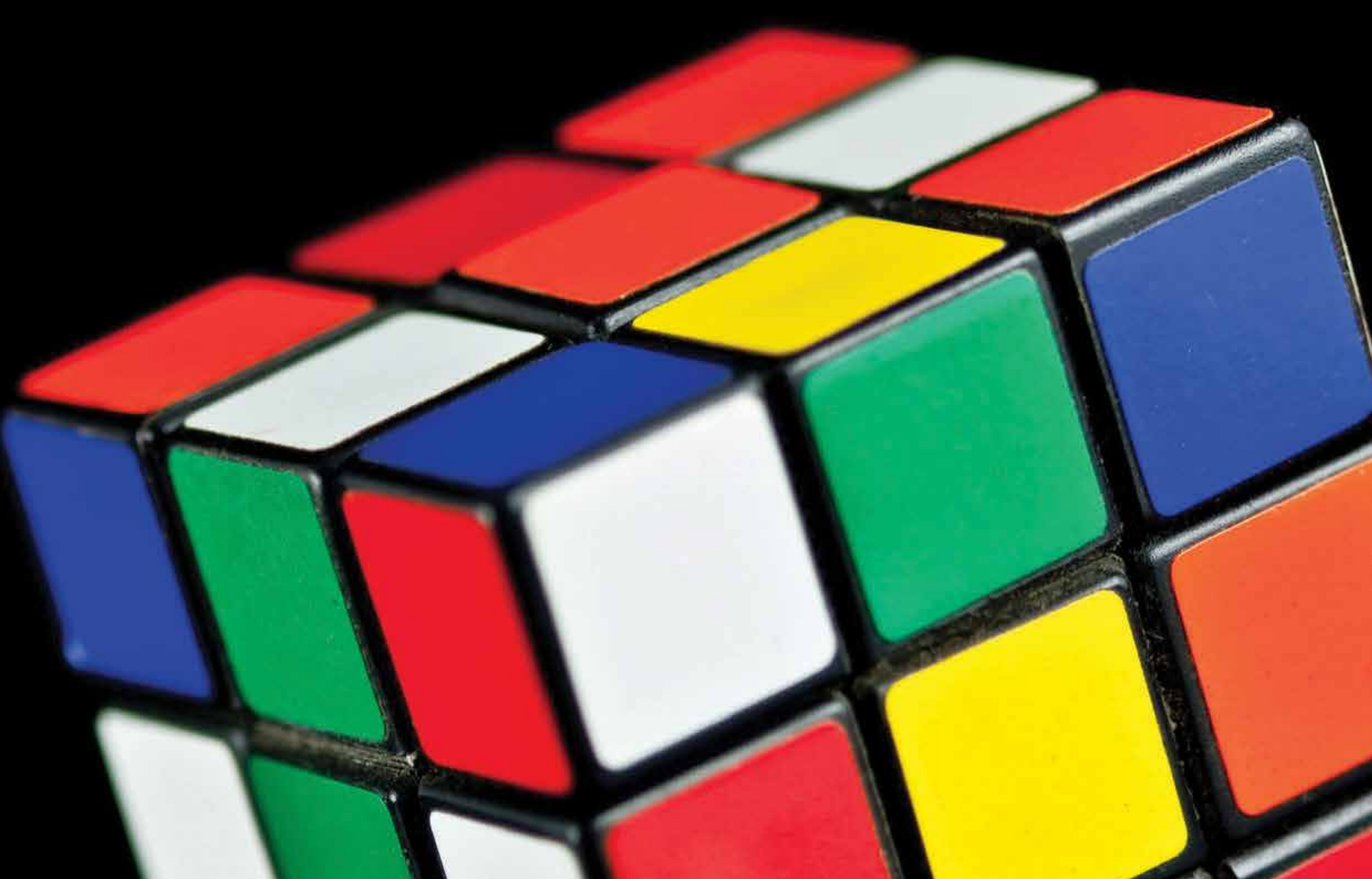
أوجد معكوس $\underline{\text{ن}}$ ، محدد $\underline{\text{ن}}^{-١}$

٤) $\underline{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد معكوس المصفوفة المربعة لـ $\underline{\text{أ}}$، أي $(\underline{\text{أ}}^{٢})^{-١}$

٥) لدينا $\underline{\text{ل}} = \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$، $\underline{\text{ن}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٤ & ٩ \end{pmatrix}$

أ أوجد معكوس $\underline{\text{ل}}$ ومعكوس $\underline{\text{ن}}$

ب أوجد المصفوفة $\underline{\text{س}}$، بحيث $\underline{\text{ل}}^{-١} - ٢\,\underline{\text{س}} = \underline{\text{ن}}^{-١}$



الوحدة الثامنة

التباديل والتوافيق

Permutations and combinations

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٨-١ تحسب مضروب العدد باستخدام الحاسبة وبدون استخدامها.

٨-٢ تبسّط عبارات تتضمن مضروب العدد.

٨-٣ تحسب عدد التباديل لـ ر من العناصر من أصل ن من العناصر (حيث ر $\leqslant$ ن).

٨-٤ تحسب عدد التباديل لـ ن من العناصر المختلفة، مع أو بدون عناصر متكررة (متشابهة).

٨-٥ تحسب عدد التوافيق لـ ر من العناصر من أصل ن من العناصر المختلفة.

٨-٦ تستخدم التباديل والتوافيق كتمثيلات لأمثلة من الحياة الواقعية وتفسرها.

المفردات

مضروب العدد factorial

التباديل permutations

مختلفة distinct

مكرر repetition

قيود restrictions

التوافيق combinations

متنافية mutually exclusive

متمايزة distinct

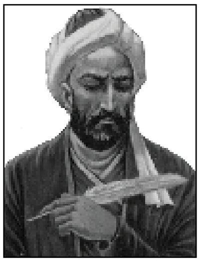
المستقلة independent

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة السادسة والوحدة الحادية عشرة	تفك الأقواس وترتب العمليات.	١) أوجد قيمة ما يلي: أ ١٢ × ١١ + ٤ × ٣ × ٢ ب ١٢ × (١١ − ٤) + ٣ × ٢ ج $\frac{١٢ \times ١١}{٤ \times ٣ \times ٢}$
الصف العاشر الوحدة العاشرة	توجد الاحتمالات باستخدام مخطط الفضاء الاحتمالي.	٢) لدى كريم ثلاث بطاقات زرقاء مرقمة من واحد إلى ثلاثة، وثلاث بطاقات حمراء مرقمة من اثنين إلى أربعة. تم اختيار بطاقة زرقاء واحدة وبطاقة حمراء واحدة بشكل عشوائي: أ باستخدام مخطط الفضاء الاحتمالي لتبيان كل النواتج الممكنة، أوجد احتمال أن: ١) تظهر البطاقتان الرقم نفسه. ٢) مجموع الأرقام الموجودة على البطاقتين أقل من ٦ ب ما هو المصطلح الإحصائي الذي يصف الأحداث التالية عندما يختار كريم بطاقتين؟ ١) اختيار بطاقة زرقاء رقمها ١ وبطاقة حمراء رقمها ٣ ٢) اختيار بطاقة زرقاء رقمها ١ وبطاقة زرقاء رقمها ٢

لماذا ندرس التباديل والتوافيق؟

لقد اهتم الإنسان لقرون عديدة بحساب عدد الطرائق التي يمكن أن تحدث فيها حوادث معيّنة، بالإضافة إلى احتمالات وقوعها.



وللعالم الرياضي المسلم نصير الدين الطوسي (١٢٠١–١٢٧٤ م) عمل كبير في حساب الاحتمالات بناء على التباديل والتوافيق، كما كتب العالم العماني الخليل بن أحمد الفراهيدي (٧١٨–٧٨٦ هـ) كتابًا في علم التعمية (علم التشفير وتحليل الشفرات) الذي تضمن أول استخدام للتباديل والتوافيق لوضع قائمة بكل المفردات العربية الممكنة التي تحتوي على أحرف علة أو خالية منها. في العام ١٩٢٨ م، نشر جون فون نيومان (John von Neumann) مقالة حول استخدام نظرية التوافيق والاحتمال في الاستراتيجيات الحربية.

وانتشر استخدام التباديل والتوافيق في مجالات أخرى كالتجارة، والصناعة، والاقتصاد، والتأمين، والعلوم الاجتماعية، والتقييم التربوي، والسياسة، بالإضافة إلى التدفق المروري والطريقة التي تنظم فيها أرقام لوحات السيارات.

٨-١ مضروب العدد

استكشف ١

تمثّل الخطوط الموجودة في الرسم أدناه المسارات التي يمكن لأمير أن يسلكها للوصول من منزله إلى ملعب رياضي.

عند مغادرة المنزل، هناك طريق واحد يمكن أن يسلكه أمير. يقوده هذا إلى تقاطع طرق حيث يمكنه اختيار أحد المسارين لمواصلة رحلته.

كلا المسارين يأخذانه إلى تقاطع آخر للطرق حيث يمكنه اختيار واحد من ثلاثة مسارات للوصول إلى الملعب الرياضي.

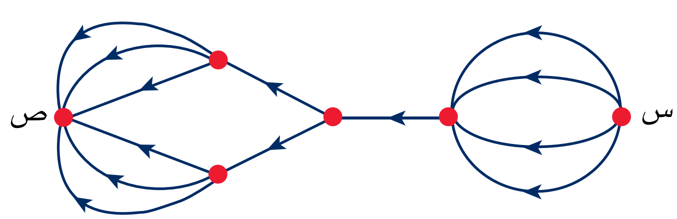
يعلم أمير أن هناك ما مجموعه ٦ مسارات مختلفة للوصول من منزله إلى الملعب الرياضي.

لكنه لا يعرف ما إذا كان يمكنه حساب ذلك باستخدام الجمع أو الضرب.

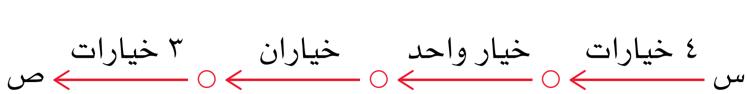
لأن ١ + ٢ + ٣ = ٦ وأيضًا ١ × ٢ × ٣ = ٦

ما هي الطريقة الصحيحة لحساب ٦ طرق برأيك: الجمع أم الضرب؟

يمثل الرسم البياني أدناه شبكة بين س، ص (يمكننا التفكير في ذلك على أنه تمثيل للطرق (مع الأسهم) بين المدن (النقاط) أو تمثيل للأسلاك بين المكوّنات الإلكترونية في دائرة كهربائية، وهكذا.



عند اختيار مسار من س إلى ص في الشكل أعلاه، وجب عليك اتخاذ قرار عند كل نقطة، كما هو مبيّن أدناه:



في كل خطوة، عليك القيام بعملية اختيار عنصر (سهم): عدد الطرق الممكنة (الخيارات) هو ٤ وبعد ذلك ١ و بعد ذلك ٢ حيث يمكنك القيام بإحدى الخطوتين إما إلى الأعلى أو إلى الأسفل، ولكل خطوة ثلاث خيارات للوصول إلى النقطة ص. يخبرنا الحرف 'و' بأن نضرب الأعداد بعضها في بعض ويخبرنا الحرف 'أو' بأن نجمع الأعداد: $٤ \times ١ \times (١ + ١) \times ٣ = ٢٤$ مسارًا ممكنًا من س إلى ص.

سنحتاج كثيرًا في عملنا على التباديل والتوافيق إلى إيجاد قيمة عبارات مثل $٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ والطريقة المختصرة للقيام بذلك هي استخدام **مضروب العدد factorial**.

يُسمى $٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ 'مضروب الأربعة'، ويكتب ٤!

يرمز إلى مضروب العدد في أغلب الحاسبات بالصورة $\boxed{n!}$

مُساعَدة

إذا أمكن القيام بعملية كاملة في أربع خطوات، وكانت الطرق الممكنة للخطوات الأولى، والثانية، والثالثة، والرابعة هي $ن_١$، $ن_٢$، $ن_٣$، $ن_٤$، إذًا العدد الكلي للطرق الممكنة للعملية الكاملة هو $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times ن_٤$

مُساعَدة

يمكن استخدام مضروب العدد فقط للأعداد الصحيحة الموجبة أو الصفر.
$\left(\frac{١}{٢}\right)!$، $(٠{,}٣)!$، $(-٤)!$ ليس لها معنى وهي غير موجودة.

مُساعَدة

بشكل عام:
$ن! = ن \times (ن - ١)!$
أو
$ن! = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢)!$
وهكذا.

نتيجة ١

$ن! = ن\,(ن - ١)(ن - ٢) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$، حيث ن عدد صحيح موجب.

$٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

لاحظ أن: $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣!$

$= ٦ \times ٥ \times ٤!$

$= ٦ \times ٥!$

يبيّن المخطّط الآتي قيم ن! التنازلية في متتالية، حيث نحصل على الحد التالي باستخدام القسمة، كما يبيّن أن ٠! يجب أن يساوي ١

ن!	٧!	٦!	٥!	٤!	٣!	٢!	١!	٠!	لا يوجد مضروب
	(÷٧)	(÷٦)	(÷٥)	(÷٤)	(÷٣)	(÷٢)	(÷١)	(÷٠)	
القيمة	٥٠٤٠	٧٢٠	١٢٠	٢٤	٦	٢	١	١	لا توجد قيم

نتيجة ٢

$٠! = ١$

مثــال ١

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

أ $\frac{٦!}{٤!}$ **ب** $\frac{١٠! \times ٣!}{١٢!}$

الحــلّ:

أ $\frac{٦!}{٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٤!}$ — بكتابة ٦! على شكل ٦ × ٥ × ٤!

$= \frac{٦ \times ٥ \times \cancel{٤!}}{\cancel{٤!}}$ — بحذف ٤!

$= ٦ \times ٥$

$= ٣٠$

ب $\frac{10! \times 3!}{12!} = \frac{10! \times 3!}{12 \times 11 \times 10!}$ بكتابة ١٢! على شكل ١٢ × ١١ × ١٠!

$= \frac{\cancel{10!} \times 3!}{12 \times 11 \times \cancel{10!}}$ بحذف ١٠!

$= \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{12}_{2} \times 11}$ بحذف ٣! الذي يساوي ٦

$= \frac{1}{22}$

مثـــال ٢

أوجد قيمة:

أ ١٠ × ٤! − ١١ × ٣! − ١٢ × ٢!

ب ٦! − ٤!

الحـــلّ:

أ ١٠ × ٤! − ١١ × ٣! − ١٢ × ٢! = ١٠ × ٢٤ − ١١ × ٦ − ١٢ × ٢

= ٢٤٠ − ٦٦ − ٢٤

= ١٥٠

ب ٦! − ٤! = ٦ × ٥ × ٤! − ٤! بكتابة ٦! على شكل ٦ × ٥ × ٤!

= ٤!(٦ × ٥ −١) بأخذ العامل المشترك ٤! إلى خارج القوسين

= ٢٤ × ٢٩

= ٦٩٦

مثـــال ٣

أ استخدم الحاسبة لإيجاد قيمة $\frac{٦! + ٥!}{٦! - ٥!}$

ب بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة $\frac{١٠!}{٨!} - \frac{٥ \times ٧!}{٣ \times ٥!}$

الحــلّ:

أ $\frac{٦! + ٥!}{٦! - ٥!} = \frac{٧٢٠ + ١٢٠}{٧٢٠ - ١٢٠} = \frac{٨٤٠}{٦٠٠} = ١{,}٤$

باستخدام الحاسبة أدخل (٦! + ٥!) ÷ (٦! − ٥!). إذا حذفت الأقواس، فإن الحاسبة ستعمل على النحو الآتي ٦! + $\frac{٥!}{٦!}$ − ٥! ويكون الناتج غير صحيح.

ب $\frac{١٠!}{٨!} - \frac{٥ \times ٧!}{٣ \times ٥!} = \frac{١٠ \times ٩ \times \cancel{٨!}}{\cancel{٨!}} - \frac{٥ \times ٧ \times ٦ \times \cancel{٥!}}{٣ \times \cancel{٥!}}$

بالقسمة على ٨! و ٥!

$= ١٠ \times ٩ - \frac{٥ \times ٧ \times \cancel{٦}^{٢}}{\cancel{٣}}$

بقسمة البسط والمقام على ٣

$= ١٠ \times ٩ - ٥ \times ٧ \times ٢$

$= ٩٠ - ٧٠$

$= ٢٠$

تمارين ٨-١

١) بدون استخدام الحاسبة، أوجد قيمة:

أ $\frac{٥!}{٣!}$

ب $\frac{٤!}{٢!} - ٣!$

ج $٧ \times ٤! + ٢١ \times ٣!$

د $\frac{١٠!}{٨!} + \frac{٩!}{٧!}$

هـ $\frac{٢٠!}{١٨!} - \frac{١٣!}{١١!}$

٢) باستخدام الحاسبة أجب عما يأتي:

أ أوجد قيمة ٥! − ٤! − ٣! − ٢! − ١!

ب رتّب القيم الآتية تصاعديًا: $\frac{٥! \times ٢}{٣! \times ٢}$، $\frac{٦!}{٤٠}$، $\frac{١}{٢٦٠} \times ٧!$

ج احسب ٩! − ٩ × ٨!

د أوجد قيمة $\frac{١٣! - ٧!}{٩! + ٨!}$.

٣) مستطيل مساحته (٦! − ١٢ × ٤!) سم^{٢} وطوله ٤! سم. أوجد عرضه بدون استخدام الحاسبة.

٤) بدون استخدام الحاسبة، بيّن أن $\frac{٧!}{٩!} = \frac{١٠}{٦!}$

٥) طول ضلعَي الزاوية القائمة في مثلث قائم الزاوية $\sqrt{٤!}$ سم، $\sqrt{٥!}$ سم.

أوجد طول الضلع الأطول (الوتر).

٨-٢ التباديل

تباديل **permutations** عدد من العناصر يعني ترتيبها في ترتيب خطي محدد. فمثلًا إذا أردنا تكوين عدد مكوّن من رقمين باستخدام ٥، ٩ فإننا نحصل على ٩٥، ٥٩ ونلاحظ أن كلا الرقمين بترتيب مختلف في كل مرة يسمى كل ترتيب تبديلًا وكل تبديل له قيمة مختلفة.

٨-٢أ تباديل ن من العناصر المختلفة

نَصف مجموعة عناصر بأنها مختلفة **distinct** إذا لم يكن أي منها مطابقًا للآخر. يمكن تمييز العناصر المختلفة بعضها عن بعض بسهولة، فمثلًا طالبان في الصف يختلف كل منهما عن الآخر أي ليسا متطابقين، لكن الحرفَين أ، أ لا يختلف أحدهما عن الآخر فهما متطابقان. وكذلك الرقمان ٦، ٦ متطابقان.

- يعتمد عدد التباديل التي يمكن تكوينها من مجموعة من العناصر المختلفة على عدد الخيارات التي لدينا لكل موقع في الترتيب.
- بالعودة إلى تكوين عدد باستخدام الرقمين ٥ و ٩، نعلم أن أحد الأرقام سيوضع على اليسار (في منزلة العشرات) وأن الرقم الآخر سيوضع على اليمين (في منزلة الآحاد).

  إذا وضعنا أولًا رقمًا في منزلة العشرات، يكون لدينا خياران، ثم يبقى خيار واحد فقط للرقم الذي نضعه في منزلة الآحاد. لاحظ أن عدد الخيارات (٢ و ١) مرتبط بالحرف و، ويدلنا ذلك على التفكير في ضرب عدد الخيارات بعضها في بعض لإيجاد عدد التباديل: ٢ × ١ = ٢
- دعونا نفكر في التباديل بين الأحرف الثلاثة أ، ب، ج. إذا وضعنا الحرف الأول إلى اليمين، فلدينا ٣ خيارات من الأحرف، ثم بالنسبة إلى الحرف الثاني لدينا خياران، وللحرف الثالث يبقى لدينا خيار واحد فقط.

  عدد التباديل هو ٣ × ٢ × ١ = ٦ (والتباديل هي أب ج، أج ب، ب أ ج، ب ج أ، ج أ ب، ج ب أ)

نتيجة ٣

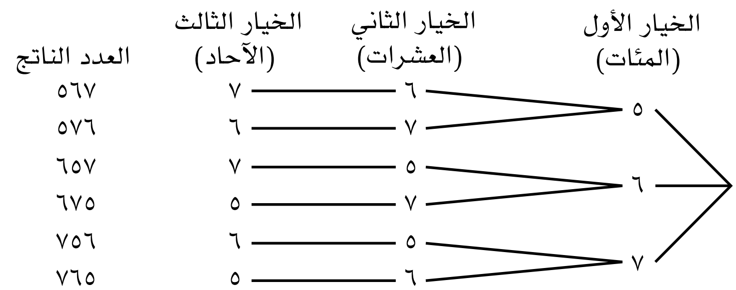
يرمز إلى تباديل ن من العناصر المختلفة بالرمز $^{ن}ل_{ن}$ وتُقرأ 'نون لام نون'، وعددها يساوي ن! تبديلًا.

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة هو $^{ن}ل_{ن}$ = ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) ×...× ٣ × ٢ × ١
حيث ن عدد صحيح موجب.

فمثلًا: الأعداد المكوّنة من ثلاثة أرقام مختلفة والتي يمكن كتابتها من الأرقام ٥، ٦، ٧ هي:

٥٦٧، ٥٧٦، ٦٥٧، ٦٧٥، ٧٥٦، ٧٦٥

مخطط الشجرة الآتي يمكن أن يكون طريقة أخرى بديلة لتوضيح التباديل الستة الممكنة للأرقام الثلاثة المختلفة:



هذه الطرق مناسبة لإيجاد تباديل عدد قليل من العناصر، ولكن تخيّل تشكيل قائمة لإيجاد تباديل ٧ أحرف؛ سيكون عدد التباديل أكثر من ٥٠٠٠ وسيكون عدد فروع مخطط الشجرة أكثر من ٥٠٠٠ فرع.

نحتاج إلى طريقة عملية أكثر لإيجاد عدد التباديل، وهذه واحدة من استخدامات المضروب.

بالعودة إلى الأعداد الستة المكوّنة من الأرقام الثلاثة ٥، ٦، ٧ باعتماد عدد الخيارات التي يمكن فيها وضع الرقم في كل منزلة في التبديل. نجد ثلاثة خيارات لمنزلة المئات، وخيارَين لمنزلة العشرات، وخيارًا واحدًا لمنزلة الآحاد. فيكون:

$$\underset{\text{خيارات}}{\underline{٣}} \times \underset{\text{خيارات}}{\underline{٢}} \times \underset{\text{خيار}}{\underline{١}}$$

تمثل الأعداد أعلاه عدد الخيارات الممكنة لوضع الأرقام الثلاثة عند تكوين التباديل. يتم ضرب عدد الخيارات بعضها في بعض لأنه يوجد ٣ خيارات لمنزلة المئات و خياران لمنزلة العشرات و خيار واحد لمنزلة الآحاد.

يمكن ترتيب الأرقام الثلاثة في ٣ × ٢ × ١ = ٣! = $^{٣}ل_{٣}$ = ٦ طرائق.

مُساعَدة

يدلنا الحرف 'و' بين الخيارات على وجوب ضرب عدد الخيارات بعضها في بعض.
وظهور كلمة 'أو' بين الخيارات يدلنا على وجوب جمعها.

مثــال ٤

بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب خمسة أولاد في صف؟

الحــلّ:

$^{٥}ل_{٥}$ = ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

نضرب عدد الخيارات لكل موقع من المواقع الخمسة.

مُساعَدة

نبحث عن الطريقة الأسهل لإيجاد ناتج ضرب عدد الخيارات من اليمين إلى اليسار أو من اليسار إلى اليمين:

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ٥!

مثـــال ٥

بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب تسعة كتب رياضيات مختلفة وأربعة كتب فيزياء مختلفة في رف؟

الحـــلّ:

$ل_{١٣}^{١٣}$ = ١٣! = ٦٢٢٧٠٢٠٨٠٠ طريقة

تسعة كتب رياضيات وأربعة كتب فيزياء كلها مختلفة لذلك نعتبرها ١٣ عنصرًا مختلفًا.

تمارين ٨-٢أ

١) باستخدام كل رقم مرة واحدة فقط، أوجد عدد الأعداد المختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام:

أ الأرقام ٣، ٥، ٧، ٩

ب الأرقام ١، ٨، ٣، ٦، ٢، ٤، ٥

ج الأرقام ٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ١

٢) أوجد عدد تباديل:

أ ١١ صحنًا جميع مقاساتها مختلفة.

ب ١٣ قلم رصاص، جميعها بأطوال مختلفة.

ج ٩ مثلثات و ٣ مستطيلات، جميعها بألوان مختلفة.

٣) بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب ست شتلات (برتقال، ليمون، جوافة، مانجو، عنب، مشمش) في صف بحديقة المنزل؟

٤) بكم طريقة مختلفة يمكن أن يقف هؤلاء الأشخاص في صف؟

أ امرأتان   ب ستة رجال   ج ثمانية أشخاص

٥) بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس هؤلاء الأشخاص معًا في صف واحد؟

أ أربع فتيات   ب ثلاثة فتيان

٨-٢ب تباديل ن من العناصر بعضها متشابه

عندما تتضمن مجموعة ما ن عنصرًا بعضها متشابه (مكرر **repetition**) (ليست جميعها مختلفة)، فسيكون عدد التراتيب أقل من $^{ن}ل_{ن}$ تبديلًا، لذا نحتاج إلى تعديل استخدام المضروب.

- افترض أنك تريد أن تكوّن عددًا من ثلاثة أرقام باستخدام الأرقام ١، ٢، ٣

فسيكون عدد التراتيب هو $^{٣}ل_{٣}$ = ٣! لذا يمكننا تكوين ستة أعداد وهي: ١٢٣، ١٣٢، ٢١٣، ٢٣١، ٣١٢، ٣٢١

ولكن إذا كان اثنان من الأرقام الثلاثة متشابهَين (٢، ٢، ٣ مثلًا)، فلا يوجد إلا ثلاثة أرقام ممكنة وهي: ٢٢٣ و ٢٣٢ و ٣٢٢

يتم تقليل عدد التباديل من ستة إلى ثلاثة. أي $^{٣}ل_{٣}$ ÷ $^{٢}ل_{٢}$ = ٣! ÷ ٢! = ٦ ÷ ٢ = ٣

- في الحالة المذكورة أعلاه، تم تقليل عدد التباديل بمقدار $^{٢}ل_{٢}$ = ٢! = ٢، الذي هو مضروب عدد الأرقام المكررة.

- إن هذه الحالة مشابهة لترتيب حروف الأبجدية:

فمثلًا إذا كان لدينا ٥ أحرف مختلفة، فإن عدد التراتيب الممكنة هو $^{٥}ل_{٥}$ = ٥! = ١٢٠ ترتيبًا ممكنًا.

وإذا افترضنا أن الأحرف الخمسة تتضمن أحرفًا مكررة (٣ أ، ٢ ب مثلًا أي أ، أ، أ، ب، ب).

إذًا يوجد عشرة تباديل فقط وهي: أ أ أ ب ب، أ أ ب ب أ، أ أ ب أ ب، أ ب ب أ أ، أ ب أ ب أ، أ ب أ أ ب، ب ب أ أ أ، ب أ أ أ ب، ب أ أ ب أ، ب أ ب أ أ.

- يتم تقليل عدد التباديل المكوّنة من ٥ أحرف من ١٢٠ إلى ١٠ لأنها ليست كلها مختلفة.

هناك ٣ أ، ٢ب فيقل عدد التباديل من ٥! إلى ٥! ÷ (٣! × ٢!)

إذًا بالنسبة إلى ٥ أحرف مع ٣ تكرارات لحرف واحد وتكرارَين لحرف آخر، يكون عدد التباديل $\frac{٥!}{٣! \times ٢!} = \frac{١٢٠}{١٢} = ١٠$

نتيجة ٤

عدد تباديل ن من العناصر تحوي ر من العناصر المتشابهة فيما بينها، م من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها، هـ من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها، ... يساوي:

$\frac{^{ن}ل_{ن}}{ر! \times م! \times هـ! \times ...} = \frac{ن!}{ر! \times م! \times هـ! \times ...}$، حيث ر + م + هـ + ... = ن

مثال ٦

أ كم عددًا مكوّنًا من خمسة أرقام يمكن كتابته باستخدام جميع الأرقام ٣، ٣، ٤، ٤، ٥

ب عاصمة بوركينا فاسو هي واغادوغو. أوجد عدد التباديل المختلفة لجميع أحرف الكلمة.

الحلّ:

أ $\frac{!٥}{!٢ \times !٢} = ٣٠$ عددًا

يوجد خمسة أرقام علينا ترتيبها، حيث يتكرر ٣ مرّتَين، و٤ مرّتَين

ب $\frac{!٨}{!٣ \times !١ \times !٢ \times !٢} = ١٦٨٠$ تبديلًا

ترتيب ٨ أحرف يتكرر فيها حرف (و) ثلاث مرات، حرف (د) مرة واحدة، حرف (أ) مرتين، حرف (غ) مرتين

مُساعَدة

عند استخدام الصيغة المعطاة في نتيجة ٤ نستثني !١ لأن ناتجه يساوي ١ وهو لا يؤثر في عملية الضرب.

في الجزء (أ) من هذا المثال !١ يعبّر عن تكرار الرقم ٥

مثال ٧

لدى مازن مجموعة من ألعاب السيارات، ٦ سيارات متطابقة لونها أحمر، ٤ سيارات مختلفة لونها أصفر و٥ سيارات متطابقة لونها أزرق،
بكم طريقة يمكن لمازن ترتيب ألعابه في صف؟

الحلّ:

$\frac{!١٥}{!٦ \times !٥} = ١٥١٣٥١٢٠$

عدد السيارات التي يراد ترتيبها = ١٥
عدد العناصر المكررة = ٦ سيارات حمراء، ٥ سيارات زرقاء

تمارين ٨-٢ب

١) أوجد عدد التباديل المختلفة لأحرف كل كلمة من الكلمات الآتية:

أ جدول
ب صلالة
ج الأمل
د ميسيسيبي
هـ كوالالمبور

٢) كم عددًا مكوّنًا من ستة أرقام يمكن تكوينه باستخدام جميع الأرقام الآتية:

أ ١، ١، ١، ١، ١، ٣
ب ٢، ٢، ٢، ٧، ٧، ٧
ج ٥، ٦، ٦، ٦، ٧، ٧
د ٨، ٨، ٩، ٩، ٩، ٩

٣) لدى معلمة رياضيات ٢٠ مربعًا بلاستيكيًا متطابقًا، خمسة مربعات منها حمراء اللون، سبعة مربعات زرقاء اللون، ثمانية مربعات خضراء اللون. إذا تم وضعها متلاصقة في صف، فكم تبديلًا يمكن أن تكوّن باستخدام:

أ مربع واحد من كل لون
ب خمسة مربعات حمراء فقط
ج جميع المربعات الزرقاء والخضراء
د المربعات الـ ٢٠ جميعها

٤) سُئلت طالبتان أن تجدا عدد الطرائق التي يمكن أن تزرعا بها شجرتَين كبيرتَين وثلاث شجرات صغيرة في صف. فكانت إجابة الطالبة الأولى ٥! = ١٢٠، وإجابة الطالبة الثانية $\frac{٥!}{٢! \times ٣!}$. من منهما إجابتها صحيحة؟ اشرح الخطأ الذي وقعت فيه الطالبة الأخرى.

٥) يوجد ٤٢٠ تبديلًا مختلفًا لأحرف كلمة مكوّنة من سبعة أحرف. صِف أحرف هذه الكلمة.

٨-٢ج تباديل ن من العناصر المختلفة بوجود القيود

ينقص عدد التباديل الممكنة للعناصر عندما توضع عليها قيود **restrictions**.

بعض الأمثلة على القيود تتضمن قيامنا بإيجاد تراتيب الأحرف أ، ب، ج، د التي تبدأ بحرف الباء وليس فيها حرفا أ، ج متجاورَين، وهكذا.

كقاعدة عامة يجب استقصاء عدد التباديل الممكنة للمواقع المقيدة أولًا، ثم للمواقع غير المقيدة.

مثــال ٨

عدد تراتيب عائلة مكوّنة من رجل وامرأة وولد وبنت في صف هي $^{٤}ل_{٤}$ = !٤ = ٢٤ طريقة. أوجد عدد هذه التراتيب حيث تكون المرأة:

أ واقفة في بداية الصف.

ب ليست واقفة في بداية الصف.

الحــلّ:

أ $\underline{١} \times \underbrace{\underline{٣} \times \underline{٢} \times \underline{١}}_{^{٣}ل_{٣}}$

= ٦

يوجد خيار واحد للمرأة أول الصف.
يمكن ملء المواقع الثلاثة الأخرى بـ $^{٣}ل_{٣}$ = !٣ طريقة.

ب $^{٤}ل_{٤}$ − ٦ = ٢٤ − ٦ = ١٨

وقوف المرأة في أول الصف في ٦ من الترتيبات، يعني عدم وقوفها في أول الصف في جميع التراتيب الباقية. لذا سيقل مجموع التراتيب الكلية (٢٤) بمقدار ٦

مثــال ٩

أوجد عدد طرائق ترتيب ستة رجال في صف بحيث يكون:

أ أكبرهم عمرًا في بداية الصف من جهة اليمين.

ب الاثنان الأصغر عمرًا في نهاية الصف من جهة اليسار.

ج أقصرهم طولًا لا يكون في أي من نهايتَي الصف.

الحــلّ:

من دون وجود القيود يمكن ترتيب الرجال الستة بطرائق عددها = !٦ = ٧٢٠ طريقة، ولكن مع وجود القيود سينقص عدد التراتيب عن ٧٢٠

أ ١ × $^{٥}ل_{٥}$ = ١ × !٥ = ١٢٠

الرجل الأكبر سنًا يقف في بداية الصف من اليمين، لذا له خيار واحد فقط، ويمكن ترتيب الرجال الخمسة الآخرين بطرائق عددها $^{٥}ل_{٥}$

ب ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٢ × ١

ل$^{٤}_{٤}$ ل$^{٢}_{٢}$

ل$^{٤}_{٤}$ × ل$^{٢}_{٢}$ = ٤! × ٢! = ٤٨

حُدد موقع الاثنَين الأصغر عمرًا في نهاية الصف من اليسار، ويمكن أن يحدد موقعهما بطرائق عددها ل$^{٢}_{٢}$ يمكن ترتيب الرجال الأربعة الآخرين بطرائق عددها ل$^{٤}_{٤}$

ج ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٤

ل$^{٤}_{٤}$

٥ × ل$^{٤}_{٤}$ × ٤ = ٥ × ٤! × ٤ = ٤٨٠

نبدأ من الطرف في جهة اليمين: لا يمكن أن يقف الرجل الأقصر في الطرف، إذًا يمكن أن يقف في الطرف الأيمن أحد الخمسة المتبقين، فيبقى منهم ٤
بالطريقة نفسها، يقف أحد الأربعة في الطرف من جهة اليسار (ما زال الرجل الأقصر مستثنى)، فيبقى منهم ٣ نضيف إليهم الرجل الأقصر، فيصبح عددهم ٤ ويمكن أن يقفوا في الوسط من خلال ل$^{٤}_{٤}$ طريقة كما هو مبيّن.

حل آخر:

يمكن أن يقف أقصرهم في أربعة أماكن، أما الخمسة الآخرون فيمكن ترتيبهم بطرائق عددها ل$^{٥}_{٥}$،
فيكون ٤ × ٥! = ٤٨٠

مثــال ١٠

بكم طريقة نضع حبتَي مانجو (م) وثلاث حبات بطيخ (ب) في صف إذا كانت حبات الفواكه الخمس متمايزة، بحيث تكون حبتا المانجو:

أ متجاورتَين.

ب غير متجاورتَين.

الحــلّ:

أ م$_{١}$ م$_{٢}$ ب$_{١}$ ب$_{٢}$ ب$_{٣}$

ل$^{٢}_{٢}$

عنصر واحد

ل$^{٤}_{٤}$

ل$^{٢}_{٢}$ × ل$^{٤}_{٤}$ = ٤٨ طريقة

توضع حبتا المانجو متجاورتَين بطريقتَين ل$^{٢}_{٢}$ يُعدّ هذا الزوج الآن عنصرًا واحدًا ليرتب مع حبات البطيخ الثلاث، فيكون عدد العناصر المطلوب ترتيبها أربعة.

ب ١٢٠ − ٤٨ = ٧٢ طريقة.

بدون قيود العناصر الخمسة ترتب في طرائق عددها ل$^{٥}_{٥}$ = ٥! = ١٢٠ طريقة. وعرفنا أنه عندما تكون حبتا المانجو متجاورتَين يكون عدد طرائق الترتيب ٤٨ طريقة تطرح من ١٢٠ طريقة.

مُساعَدة

تعامل العناصر المتجاورة غير المتباعدة كعنصر واحد ضمن ترتيب العناصر الأخرى.

تمارين ٨-٢ج

١) كم عددًا مكوّنًا من خمسة أرقام يمكن تكوينه من ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ بدون تكرار في الحالات الآتية:

أ بدون قيود أخرى

ب الأعداد الناتجة يجب أن تكون:

١) فردية　　　　٢) زوجية

٢) بكم طريقة يقف أربعة رجال وطفلان في صف إذا:

أ وقف الطفلان في الأمام.

ب وقف طفل في الأمام ووقف رجل في الخلف.

ج لم يتجاور أي رجلين.

٣) أوجد نسبة الأعداد الفردية إلى الأعداد الزوجية المكوّنة من ستة أرقام مختلفة باستخدام الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧

٤) بكم طريقة يمكن ترتيب ١٠ كتب على رف إذا:

أ وضعنا أقدم كتابَين في المنتصف.

ب وضعنا الكتب الثلاثة الأحدث بشكل متجاور.

٥) كم عددًا من ستة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٢، ٣، ٣، ٣ بحيث:

أ يبدأ العدد بالرقم ٢

ب لا يقبل القسمة على ٢

٨-٢د تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة

حتى الآن، تعاملنا فقط مع التباديل حيث يتم ترتيب جميع العناصر.

يمكننا الآن أن نأخذ خطوة إلى الأمام ونتعامل مع التباديل حيث يتم ترتيب بعض العناصر فقط.

مثلًا يمكن ترتيب الأرقام الستة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ في $^{٦}ل_{٦}$ = ٦! = ٧٢٠ طريقة.

ولكن يمكن أن يكون هناك مواقف معيّنة تطلب منا ترتيب رقمَين أو ثلاثة أو أربعة فقط من هذه الأرقام.

لتكوين ترتيبات مكوّنة من رقمَين من الأرقام الستة

على سبيل المثال: نحتاج إلى التفكير في عدد الطرائق الممكنة لاختيار الرقمَين، ثم عدد الترتيبات الممكنة التي تتكوّن من هذين الرقمين.

يمكننا حل ذلك بمجرد النظر إلى عدد الخيارات المتاحة للرقم في كل موقع من الترتيب.

الأول الثاني

تراتيب رقمين من ٦: ٦ × ٥ = ٣٠

خيارات

تذكّر أن ٦ × ٥ = $\frac{٦!}{٤!} = \frac{٦!}{(٦ - ٢)!}$

مُساعَدة

نضرب عدد الخيارات لأن لدينا ٦ خيارات للرقم الأول و ٥ خيارات للرقم الثاني. يدلنا الحرف 'و' على الضرب.

الأول الثاني الثالث

تراتيب ٣ أرقام من ٦: ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠

خيارات

تذكّر أن ٦ × ٥ × ٤ = $\frac{٦!}{٣!} = \frac{٦!}{(٦ - ٣)!}$

الأول الثاني الثالث الرابع

تراتيب ٤ أرقام من ٦: ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

خيارات

تذكّر أن ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = $\frac{٦!}{٢!} = \frac{٦!}{(٦ - ٤)!}$

لإيجاد عدد التراتيب التي يمكن تكوينها من ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة، نقسم ببساطة ن! على (ن − ر)!

$\therefore\ ^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

يمكننا تحليلها لتعطي $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

$$= \frac{ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١) \times \cancel{(ن - ر)!}}{\cancel{(ن - ر)!}}$$

$$= ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots\dots \times (ن - ر + ١)$$

نتيجة ٥

يرمز إلى عدد تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة بحيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$،
بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ (تُقرأ نون لام راء) وتعطى على الشكل:

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

أو $^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \dots \times (ن - ر + ١)$

مثــال ١١

كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

الحــلّ:

$^{٧}ل_{٣} = \frac{٧!}{(٧ - ٣)!}$

اخترنا ٣ أرقام فقط من أصل ٧ أرقام مختلفة وتجاهلنا الأربعة الأخرى.

$= \frac{٧!}{٤!}$

$= ٧ \times ٦ \times ٥$

$= ٢١٠$ أعداد مكوّنة من ثلاثة أرقام.

مُساعَدة

خيارات الأرقام الأول والثاني والثالث هي $٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$

مثــال ١٢

أوجد باستخدام الأرقام ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، مرة واحدة فقط، عدد الأعداد التي يمكن كتابتها والتي تتألف من:

أ ثلاثة أرقام.

ب أربعة أرقام.

ج ثلاثة أرقام أو أربعة أرقام.

الحــلّ:

أ $^{٥}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$ — رتّب ٣ من الأرقام الخمسة

ب $^{٥}ل_{٤} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = ١٢٠$ — رتّب أربعة من الأرقام الخمسة

ج $^{٥}ل_{٣} + {}^{٥}ل_{٤} = ٦٠ + ١٢٠ = ١٨٠$ — رتّب ثلاثة من الأرقام الخمسة أو أربعة من الأرقام الخمسة

مُساعَدة

عدد التباديل المتنافية التي يمكن تكوينها من ر عنصر من ن عناصر أو من ز عنصر من م عناصر هو $^{ن}ل_{ر} + {}^{م}ل_{ز}$

مثــال ١٣

بكم طريقة يمكن أن تجلس ٤ فتيات من أصل ١٨ فتاة على أربعة مقاعد، وتعطى أكبر الفتيات سنًا أحد المقاعد.

الحــلّ:

$^{٤}ل_{١} \times {}^{١٧}ل_{٣} = ١٦٣٢٠$ طريقة

يوجد ٤ طرائق للفتاة الأكبر سنًا لتأخذ مقعدًا، و$^{١٧}ل_{٣}$ طريقة لتجلس ٣ فتيات من أصل ١٧ فتاة أخرى على بقية المقاعد.

مُساعَدة

إذا كان لحدث ما عدد م من النواتج المحتملة، ولحدث آخر مستقل عدد ن من النواتج، فإن عدد النواتج المحتملة للحدثين معًا هو م × ن.

مثــال ١٤

بكم طريقة يمكن أن يقف أربعة أخوة وثلاث أخوات من أسرة واحدة في صف، بحيث لا يُسمح لأختين أن تقفا متجاورتَين؟

الحــلّ:

$^{٤}ل_{٤}$ لترتيب ٤ أخوة في صف

↑ $و_{١}$ ↑ $و_{٢}$ ↑ $و_{٣}$ ↑ $و_{٤}$ ↑

رتّب الأخوات في ٣ مواقع من ٥ مواقع المشار إليها فيكون عدد التباديل $^{٥}ل_{٣}$

∴ $^{٤}ل_{٤} \times {}^{٥}ل_{٣} = ١٤٤٠$ طريقة.

يوجد $^{٤}ل_{٤}$ طريقة لترتيب ٤ أخوة في صف.

$^{٥}ل_{٣}$ طريقة لتختار ٣ مواقع لوقوف الأخوات من أصل خمسة مواقع بين الأخوة أو بجانبهم.

مُساعَدة

العناصر المطلوب أن تكون متباعدة تحدد مواقعها بين أو وراء العناصر التي نُباعد بينها، وتكون أكبر منها بواحد

مثــال ١٥

باستخدام الأرقام ٢، ٤، ٦، ٧، ٨ مرة واحدة على الأكثر، أوجد:

أ عدد الأعداد الفردية المكوّنة من ثلاثة أرقام.

ب عدد الأعداد الفردية بين ٣٠٠٠، ٥٠٠٠

الحــلّ:

أ $\underline{١} \times \underbrace{\underline{٤} \times \underline{٣}}_{^{٤}ل_{٢}}$

$= ١٢$

مرة واحدة على الأكثر تعني بدون تكرار، لدينا خيار واحد لمنزلة الآحاد حيث يجب أن يكون ٧ ويتبقى لمنزلة العشرات ٤ خيارات ولمنزلة المئات ٣ خيارات.

ب $\underline{١} \times \underbrace{\underline{٣} \times \underline{٢}}_{^{٣}ل_{٢}} \times \underline{١}$

$= ٦$

لدينا خيار واحد لمنزلة الألوف: يجب أن يكون ٤

ثم لدينا خيار واحد لمنزلة الآحاد: يجب أن يكون ٧

ثم يتبقى ٣ اختيارات لمنزلة العشرات وخياران لمنزلة المئات.

تمارين ٨-٢د

١) ما عدد تباديل:

أ خمسة عناصر من ٧ عناصر مختلفة؟

ب أربعة عناصر من ٩ عناصر مختلفة؟

٢) بكم طريقة يمكن أن تمنح الميداليات الذهبية والفضية والبرونزية للمراكز الثلاثة الأولى في سباق بين ٢٠ رياضيًا؟ يمكنك أن تفترض أن أيًا من المراكز الثلاثة لا يمكن أن تعطى لأكثر من شخص.

٣) أ أوجد عدد الطرائق التي يمكن بها لأحمد أن يطلي الباب الأمامي بلون مختلف عن الباب الخلفي لمنزله إذا توافر له ١٤ لون طلاء ليختار من بينها.

ب بكم طريقة يمكن لأحمد عمل ذلك إذا رغب أن يطلي البابَين باللون نفسه؟

٤) بكم طريقة يمكن ترتيب أربعة أحرف مختلفة من الأحرف أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ز بحيث:

أ تبدأ بالحرف أ؟

ب تتضمن الحرف أ؟

٥) تتكوّن مجموعة من ١٠ طلاب من الصف التاسع و٧ طلاب من الصف العاشر في إحدى المدارس، سيتم اختيار طالبين للعب دور الطبيب والمريض في مسرحية ما. بكم طريقة سيتم تمثيل هذين الدورين بحيث يمثلهما:

أ أيّ من أفراد المجموعة؟

ب طالبان من الصف العاشر أو طالبان من الصف التاسع؟

ج طالب من الصف العاشر وطالب من الصف التاسع؟

٦) كم عددًا زوجيًا مكوّنًا من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧؟

٧) كم عددًا مكوّنًا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ٠، ١، ٢، ٣، ٤ بحيث يُستخدم كل رقم مرة واحدة فقط. إذا كان العدد

أ من مضاعفات العدد ١٠؟

ب أحاده ليس صفرًا؟

٨-٣ التوافيق

التوافيق combinations هي اختيار عناصر من مجموعة تتألف من عناصر **متمايزة distinct**، بحيث لا يهم ترتيب الاختيارات (على عكس التباديل).

في التوافيق لا يهم ترتيب العناصر بأي ترتيب معيّن.

- يسمى اختيار ر عنصرًا من أصل ن عنصر توفيقة، ولا يعد ترتيب الاختيار مهمًا.
- إذا طُلب إليك تحديد مادتين للدراسة من الكيمياء والفيزياء والأحياء، فلديك ثلاثة خيارات، لأنه لا يوجد إلا ثلاثة توافيق ممكنة من ثلاث مواد يتم أخذها مرتين في كل مرة، يمكنك اختيار الكيمياء والفيزياء أو الكيمياء والأحياء أو الفيزياء والأحياء. (التوفيقة الكيمياء والفيزياء هي نفسها التوفيقة الفيزياء والكيمياء).
- يرمز إلى توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة، حيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ بالرمز $\binom{ن}{ر}$ (وتقرأ نون فوق راء). نعلم أن تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة يساوي $^{ن}ل_{ر}$ وتعتمد على اختيار (توافيق) ر من العناصر ثم ترتيبها (تباديل) أي أن:

$$\binom{ن}{ر} \times {}^{ر}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$$

$$\binom{ن}{ر} \times ر! = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$$

استكشف ٢

باستخدام الأحرف الثلاثة أ، ب، ج، هناك $^{٣}ل_{٢} = ٦$ تباديل مختلفة يمكن إجراؤها بأخذ حرفين فقط في كل مرة.

ومع ذلك هناك فقط $\binom{٣}{٢} = ٣$ توافيق يمكن إجراؤها عن طريق اختيار حرفين فقط في كل مرة.

١) ما هي هذه التباديل الستة؟ اكتبها في قائمة.

٢) ما هي هذه التوافيق الثلاثة؟ اكتبها في قائمة.

نتيجة ٦

عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة، حيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ ويرمز إليه بالرمز $\binom{ن}{ر}$ (وتقرأ نون فوق راء) هي: $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$

مُساعَدة

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$$

سنستخدم هذا الترميز عند الحديث عن التوافيق، إلّا أن أغلب الحاسبات تعتمد رمز $^{n}C_{r}$ أو nCr (قد تحتاج إلى استخدام المفتاح SHIFT أو 2^{nd}F لتفعيل دالة التوافيق)

مثــال ١٦

بكم طريقة يمكن أن نختار ثلاث سمكات من وعاء يحتوي على سبع سمكات؟

الحــلّ:

نختار ٣ سمكات من ٧

$\binom{٧}{٣} = \frac{!٧}{!٣ \times (٧ - ٣)!} = \frac{!٧}{!٣ \times !٤} =$ ٣٥ طريقة

على الحاسبة، اضغط على المفاتيح الآتية $\boxed{7}\ \boxed{{}^{n}C_{r}}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ للحصول على الإجابة ٣٥

استكشف ٣

استخدم قانون التوافيق $\binom{ن}{ر} = \frac{!ن}{ر!(ن - ر)!}$، لاستكشاف القوانين لأي من قيم ن عندما:

أ ر = ن، أي ما هي قيمة $\binom{ن}{ن}$؟

ب ر = ١، أي ما هي قيمة $\binom{ن}{١}$؟

ج ر = ٠، أي ما هي قيمة $\binom{ن}{٠}$؟

مثــال ١٧

أ بكم طريقة يمكن أن نختار ٣ أطفال من مجموعة مؤلفة من ٥ أطفال؟

ب بكم طريقة يمكن أن نختار طفلين من مجموعة مؤلفة من ٥ أطفال؟

ج ما الذي تلاحظه بشأن إجابتيك عن الجزئيتين أ ، ب؟

الحــلّ:

أ $\binom{٥}{٣} = \frac{!٥}{!٣ \times (٥ - ٣)!} = \frac{!٥}{!٣ \times !٢} =$ ١٠ طرائق

ب $\binom{٥}{٢} = \frac{!٥}{!٢ \times (٥ - ٢)!} = \frac{!٥}{!٢ \times !٣} =$ ١٠ طرائق

ج عدد الطرائق هي نفسها (عدد طرائق اختيار طفلين واستبعاد ثلاثة يساوي عدد طرائق اختيار ثلاثة واستبعاد طفلين من خمسة).

نتيجة ٧

تجب الإشارة إلى القواعد الآتية:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ر}}$$

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} \leqslant {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$$

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر})!} = \frac{\text{مضروب العدد الذي اختير منه}}{\text{مضروب العدد المختار} \times \text{مضروب العدد غير المختار}}$$

مثـــال ١٨

تتضمن قائمة الطعام في أحد المطاعم ٣ أطباق رئيسية مختلفة و ٤ أطباق تحلية مختلفة.

إذا قررت انتقاء طبق رئيسي واحد وطبقَي تحلية، فكم عدد الوجبات الممكنة؟

الحــلّ:

يمكن انتقاء طبق رئيسي واحد من أصل ٣ وطبقَي تحلية من أصل ٤

عدد الوجبات الممكنة = $\binom{٣}{١} \times \binom{٤}{٢} = ٣ \times ٦ = ١٨$ وجبة ممكنة.

مثـــال ١٩

بكم طريقة يمكن اختيار خمسة كتب وثلاث صُحف من ثمانية كتب وست صُحف؟

الحــلّ:

عدد طرق اختيار ٥ كتب = $\binom{٨}{٥} = ٥٦$ طريقة

اخترنا خمسة كتب من ثمانية

عدد طرق اختيار ٣ صحف = $\binom{٦}{٣} = ٢٠$ طريقة

اخترنا ثلاث صحف من ست

عدد الطرق = $\binom{٨}{٥} \times \binom{٦}{٣} = ٥٦ \times ٢٠$

= ١١٢٠ طريقة

مُساعَدة

لقد تمّ اختيار الكتب والصحف بشكل مستقل، لذا نضرب توافيق الاختيارَين.

نتيجة ٨

عدد التوافيق الناتجة من اختيار:

- ر عنصرًا من ن عناصر متمايزة و ك عنصرًا من م عناصر متمايزة هو $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} \times \binom{\text{م}}{\text{ك}}$
- ر عنصرًا من ن عناصر متمايزة أو ك عنصرًا من م عناصر متمايزة هو $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{م}}{\text{ك}}$

تحصل التوافيق أحيانًا في وضعيات حيث يجب القيام بأكثر من اختيار.

مثــال ٢٠

يتم اختيار طفلين من عائلة مكوّنة من ٥ بنات و ٤ أولاد ليكونا في فريق التنس الثنائي.

أ ما عدد الطرائق التي يمكن بها القيام بذلك إذا كان الفريق يتكوّن من:

١) بنتَين ولا أولاد.

٢) ولدَين ولا بنات.

٣) بنت وولد.

ب ما هو عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار الفريق؟

الحــلّ:

أ ١) $\binom{٥}{٢} \times \binom{٤}{٠} = ١٠$ طرائق

نختار بنتين من ٥ بنات وصفر أولاد من ٤

٢) $\binom{٤}{٢} \times \binom{٥}{٠} = ٦$ طرائق

نختار ولدين من ٤ اولاد وصفر بنات من ٥

٣) $\binom{٥}{١} \times \binom{٤}{١} = ٥ \times ٤ = ٢٠$ طريقة

نختار بنتًا من ٥ بنات وولدًا من ٤ أولاد

ب ١٠ + ٦ + ٢٠ = ٣٦ طريقة

نختار بنتين أو ولدين أو بنتًا وولدًا

مثــال ٢١

يُراد اختيار فريق تطوعي مكوّن من خمسة أشخاص من بين ست نساء وخمسة رجال. أوجد عدد الفرق الممكنة بحيث يكون عدد النساء في الفريق أكثر من عدد الرجال.

الحــلّ:

	من ٦ نساء	من ٥ رجال	عدد طرائق اختيار الفريق
	٣	٢	$\binom{٦}{٣} \times \binom{٥}{٢} = ٢٠٠$
أو	٤	١	$\binom{٦}{٤} \times \binom{٥}{١} = ٧٥$
أو	٥	٠	$\binom{٦}{٥} \times \binom{٥}{٠} = ٦$

يبيّن الجدول طرائق تشكيل الفريق ليكون عدد النساء فيه أكثر من عدد الرجال، وكذلك عدد الطرائق التي يمكن اختيار الفرق. اختيار الرجال والنساء هي أحداث مستقلة (لذا نضرب) واختيار الفرق المختلفة هي أحداث متنافية (لذا نجمع).

عدد طرائق اختيار الفريق = ٢٠٠ + ٧٥ + ٦ = ٢٨١ فريقًا حيث عدد النساء أكثر من عدد الرجال.

تمارين ٨-٣

١) أ لدى ولد ٥ قطع نقدية و ٦ أزرار. بكم طريقة مختلفة يمكنه اختيار:

١) قطعة نقدية واحدة.

٢) ٦ أزرار.

ب لدى مزارع ٨ دجاجات و ٦ عنزات و ٥ بقرات. بكم طريقة مختلفة يمكنه اختيار:

١) ٣ عنزات أو بقرتَين.

٢) دجاجة واحدة أو عنزة واحدة أو بقرة واحدة.

ج لدى امرأة ٩ أكواب و ٨ أطباق و ٧ أوعية. بكم طريقة مختلفة يمكنها اختيار:

١) ٣ أطباق و ٤ أوعية.

٢) كوبَين و ٤ أطباق و ٦ أوعية.

٢) من بين سبعة رجال وثمان نساء أوجد عدد طرائق اختيار:

أ أربعة رجال وخمس نساء

ب ثلاثة رجال وست نساء

ج على الأقل ١٣ شخصًا

٣) أ بكم طريقة يمكن اختيار ٥ أوراق من مجموعة أوراق عددها ٥٢ ورقة مختلفة؟

ب الأوراق من الجزء أ مقسمة إلى قسمَين كل قسم ٢٦ ورقة، قسم أحمر وقسم أسود. كم خيارًا لخمسة أوراق في الجزء أ يتألف من ٣ أوراق حمراء و ٢ أوراق سوداء؟

٤) أ لدينا ٢٦ عنصرًا متمايزًا. أوجد عدد الطرائق التي يمكننا فيها اختيار:

١) ٦ عناصر متمايزة.

٢) ٢٠ عنصرًا متمايزًا.

ب استخدم نواتج الجزء أ لتجد الشرط الذي يسمح أن يكون $\binom{س}{ص} = \binom{س}{ع}$ حيث س، ص، ع أعداد موجبة صحيحة أو صفرية.

٥) من بين ستة أولاد وسبع فتيات، أوجد عدد طرائق اختيار مجموعة مكوّنة من ثلاثة أطفال يكون فيها عدد الأولاد أكثر.

٦) في حقيبة ٦ صمامات كهربائية حمراء، ٥ زرقاء، ٤ صفراء. أوجد عدد الطرائق الممكنة لاختيار:

أ ٣ صمامات بألوان مختلفة.

ب ٣ صمامات من اللون نفسه.

٧) تم استئجار سيارتين لنقل ثمانية أصدقاء إلى المطار. تتسع إحدى السيارتَين لخمسة أشخاص والسيارة الأخرى لثلاثة أشخاص.

ما المعلومة المُعطاة في هذا الموقف من خلال الحقيقة $\binom{٨}{٥} = \binom{٨}{٣} = ٥٦$؟

٨) كم اختيارًا مختلفًا ممكنًا لثلاثة أحرف من الأحرف أ، ب، ج، د، هـ؟

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١، لكل عدد صحيح ن > ٠
- ٠! = ١.
- إحدى المفردات التي تدل على التباديل مفردة ’ترتيب‘.
- التباديل طريقة لترتيب عناصر بشكل معيّن.
- من المفردات التي تدل على التوافيق مفردتا ’اختيار‘، و’انتقاء‘.
- التوافيق طريقة لاختيار عناصر مع إهمال الترتيب.
- من ن عنصرًا مختلفًا يكون:

  ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \text{ن}!$ تباديل كل العناصر ن.

  ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$ تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة.

  $\dfrac{\text{ن}!}{\text{ت}! \times \text{ك}!}$ تباديل ن من العناصر تحوي ت من العناصر المتشابهة فيما بينها و ك من العناصر المتشابهة فيما بينها.

  $\dbinom{\text{ن}}{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر})!}$ توافيق اختيار ر عنصرًا من ن عنصرًا.

- عدد التوافيق التي يمكن تكوينها من

  ر عنصرًا من أصل ن عنصر و م عنصرًا من أصل ك عنصرًا هو: $\dbinom{\text{ن}}{\text{ر}} \times \dbinom{\text{ك}}{\text{م}}$

  ر عنصرًا من أصل ن عنصر أو م عنصرًا من أصل ك عنصرًا هو: $\dbinom{\text{ن}}{\text{ر}} + \dbinom{\text{ك}}{\text{م}}$

- عدد التباديل التي يمكن تكوينها من

  ر عنصرًا من أصل ن عنصر و م عنصرًا من أصل ك عنصرًا هو: ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} \times {}^{\text{ك}}\text{ل}_{\text{م}}$

  ر عنصرًا من أصل ن عنصر أو م عنصرًا من أصل ك عنصرًا هو: ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} + {}^{\text{ك}}\text{ل}_{\text{م}}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثامنة

١) طُلب إلى خمس إداريات وأربع معلمات وطالبتين الوقوف في صف. أوجد الطرائق التي يمكن الوقوف بها لتكون:

أ الطالبتان متباعدتَين.

ب جميع المعلمات متباعدات.

٢) كم واحدة من الترتيبات الـ ٥٠٤٠ لكل أحرف كلمة 'استسهاله' (ا س ت س هـ ا ل هـ) تبدأ وتنتهي بالحرف نفسه؟

٣) تصدر إحدى شبكات الهاتف خطوطًا هاتفية مؤلفة من ٨ أرقام تبدأ جميعها بـ ٧٩

أ ما هو عدد أرقام الهاتف المختلفة التي يمكن لهذه الشركة أن تصدرها؟

ب أوجد عدد أرقام الهاتف التي:

١) تنتهي بالرقمَين ٩٧

٢) تقرأ من اليمين إلى اليسار كما تقرأ من اليسار إلى اليمين.

٤) يحوي رفّ مكتبة خمسة كتب طول كل منها ١٥ سم، وأربعة كتب طول كل منها ٢٠ سم، وثلاثة كتب طول كل منها ٢٥ سم. أوجد عدد طرائق ترتيب الكتب على الرف بحيث لا يكون أي من هذه الكتب أقصر من الكتاب الذي على يمينه مباشرة.

٥) كم طريقة يمكن فيها تقسيم ١٥ طفلًا إلى ٣ مجموعات في كل منها خمسة أطفال بحيث:

أ لا توجد قيود.

ب اثنان من الأطفال أخوة وجب أن يكونا في المجموعة نفسها.

٦) يُراد اختيار خمسة أشخاص عشوائيًّا من مجموعة مكوّنة من تسعة أشخاص للعمل في جمعية. بكم طريقة يمكن إجراء ذلك إذا رفض شخصان العمل معًا في الجمعية؟

٧) قدم مصرف ما لكل مالك حساب بطاقة مصرفية من ٩ أرقام مرتبة في صف في ثلاث مجموعات، كما هو مبيّن في الشكل.

٦ ٣ ٥ ٣   ٠ ٧   ٧ ٤ ٤

أوجد عدد البطاقات المتاحة إذا:

أ لم توجد قيود على الأرقام المستخدمة.

ب لا يمكن أن تبدأ أي من المجموعات بالصفر.

ج لا يمكن أن يكون الرقمان في المجموعة الثانية متطابقَين.

٨) في سلّة ٩ زهرات: ٢ بيضاء، ٣ صفراء، ٤ حمراء. تمّ اختيار أربع منها عشوائيًا. في كم واحدة من هذه الاختيارات زهرتان حمراوان على الأقل؟

الوحدة التاسعة
مفكوك ذات الحدّين
Binomial expansions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٩-١ تستخدم مثلّث باسكال لتجد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب.

٩-٢ تستخدم مفكوك $(أ + ب)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب، لإيجاد حد معيّن في مفكوك $(أ س + ب)^{ن}$ حيث تكون فيه قوى س محددة.

٩-٣ تستخدم الحد العام (الحد النوني) $ح_{ن} = \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$ ، $٠ \leqslant ر \leqslant ن$.

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة السادسة	تفكّ الأقواس وتبسّط العبارات الجبرية.	١) فكّ الأقواس وبسّط: أ (٢س + ٣)^{٢} ب (١ − ٣س)(١ + ٢س − ٣س^{٢})
الصف التاسع الوحدة الثالثة	تبسّط الأسس.	٢) بسّط: أ (٥س^{٢})^{٣} ب (−٢س^{٣})^{٥}

المفردات

مثلث باسكال

Pascal’s triangle

نظرية ذات الحدّين

binomial theorem

لقد تعلمت في الصف التاسع (الوحدة السادسة) كيف تجد مفكوك عبارات جبرية مثل (١ + س)^{٢}، وستتعلم في هذه الوحدة كيفية إيجاد مفكوك عبارات أخرى لقوى أكبر؛ على سبيل المثال: افترض أن طول ضلع مربع (أ + ب). ستكون مساحته (أ + ب)^{٢}، وتكتب في صورة أ^{٢} + ٢أ ب + ب^{٢}، الآن، ما حجم مكعب طول ضلعه (أ + ب)؟ الحجم يساوي (أ + ب)^{٣}. تساعدنا نظرية ذات الحدَّين على إيجاد مفكوك (أ + ب)^{ن} بوتيرة أسرع وبكفاءة عالية.

بلايز باسكال Blaise Pascal (١٩٢٣– ١٩٦٢م) عالم رياضيات ومخترع وفيلسوف فرنسي، أسهم بشكل كبير في التطورات التي حصلت لاحقًا في مجالات الهندسة والاقتصاد ونظرية الاحتمالات، كما اخترع أقدم الحاسبات.

كان العديد من علماء الرياضيات من حول العالم (الهند، بلاد فارس، الصين) يعلمون بالفعل عن بنية ما أصبح يُعرف لاحقًا باسم مثلث باسكال، وهو أداة مفيدة لإيجاد معاملات الحدود في الكثير من المفكوكات.

إن مفكوك ذات الحدَّين يُستخدم للتنبؤ بكيفية أداء اقتصاد بلد ما في المستقبل القريب، وهي ذات قيمة كبيرة من حيث وضع توقعات اقتصادية دقيقة.

٩-١ مفكوك ذات الحدين باستخدام مثلّث باسكال

يمثل مثلث باسكال نمطًا من الأعداد المثلثية، حيث تكتب الأعداد في كل صف انطلاقًا من الصف الذي فوقه مباشرة، ويمكن توسعته قدر ما نشاء، كما أنه يحتوي على عدد وافر من الأنماط المختلفة مثل:

مجموع كل صف يساوي ضعف مجموع الصف السابق له:

								مجموع أعداد الصف
١	١							$\leftarrow$ ٢
١	٢	١						$\leftarrow$ ٤
١	٣	٣	١					$\leftarrow$ ٨
١	٤	٦	٤	١				$\leftarrow$ ١٦
١	٥	١٠	١٠	٥	١			$\leftarrow$ ٣٢
١	٦	١٥	٢٠	١٥	٦	١		
١	٧	٢١	٣٥	٣٥	٢١	٧	١	

ستتعلم في هذا الدرس كيف تكتب مثلث باسكال، وكيف تستخدمه لإيجاد مفكوك مثل $(١ + س)^{٥}$

عرفت سابقًا أن $(أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

يمكن استخدام مفكوك $(أ + ب)^{٢}$ لإيجاد مفكوك $(أ + ب)^{٣}$

$$(أ + ب)^{٣} = (أ + ب)(أ + ب)^{٢}$$

$$= (أ + ب)(أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢})$$

$$= أ^{٣} + ٢أ^{٢}ب + أب^{٢} + أ^{٢}ب + ٢أب^{٢} + ب^{٣}$$

$$= أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$$

وبالمثل نجد $(أ + ب)^{٤} = أ^{٤} + ٤أ^{٣}ب + ٦أ^{٢}ب^{٢} + ٤أب^{٣} + ب^{٤}$

نكمل كتابة مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ حيث ن = ١، ٢، ٣، ٤ كاملًا وبالترتيب:

$$(أ + ب)^{١} = ١أ + ١ب$$

$$(أ + ب)^{٢} = ١أ^{٢} + ٢أب + ١ب^{٢}$$

$$(أ + ب)^{٣} = ١أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ١ب^{٣}$$

$$(أ + ب)^{٤} = ١أ^{٤} + ٤أ^{٣}ب + ٦أ^{٢}ب^{٢} + ٤أب^{٣} + ١ب^{٤}$$

مُساعَدة

لاحظ في مفكوك $(أ + ب)^{٢}$ النمط في قوى العددين أ، ب ؛ الحد الأول هو $أ^{٢}$ ولا يحتوي على ب، والحد الأخير هو $ب^{٢}$ ولا يحتوي على أ . وبينهما، كل حد بعد الحد $أ^{٢}$ تتنازل قوى أ بمقدار ١ وتتزايد قوى ب بمقدار ١

إذا نظرت إلى مفكوك (أ + ب)^{٤} فستلاحظ أن أسس أ، ب تشكّل نمطًا.

- الحدّ الأول أ^{٤} ويتناقص أس (أ) واحدًا بينما يزداد أس (ب) واحدًا كل مرة في الحدود التالية.
- كل حدّ من الحدود مجموع أسسه ٤ (أ^{٤}، أ^{٣}ب، أ^{٢}ب^{٢}، أ ب^{٣}، ب^{٤})
- الحدود منظمة ومرتبة تنازليًا حسب قوى أ وتصاعديًا حسب قوى ب

تشكّل معاملات الحدود نمطًا ويعرف بـ **مثلث باسكال** **Pascal's triangle**.

ن = ٠   ١

ن = ١   ١   ١

ن = ٢   ١   ٢   ١

ن = ٣   ١   ٣   ٣   ١

ن = ٤   ١   ٤   ٦   ٤   ١

الصف الآتي سيكون:

١   ٥   ١٠   ١٠   ٥   ١

ويمكن استخدامه لكتابة مفكوك (أ + ب)^{٥}:

(أ + ب)^{٥} = ١أ^{٥} + ٥أ^{٤}ب + ١٠أ^{٣}ب^{٢} + ١٠أ^{٢}ب^{٣} + ٥أ ب^{٤} + ١ب^{٥}

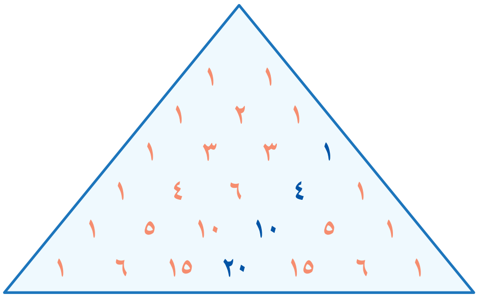
مُساعَدة

يمكن ملاحظة أن الحدود مرتبة ومنظمة بحسب القوى.

مُساعَدة

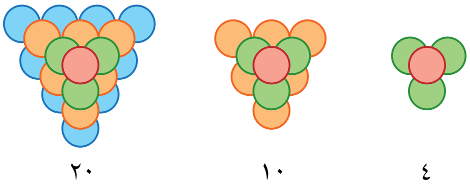
- يبدأ كل صف بالعدد ١ وينتهي به.
- كل عدد هو مجموع العددَين من الصف الذي فوقه.

استكشف ١



يوجد العديد من الأنماط في مثلث باسكال.

مثلًا، تمّ تلوين الأعداد ١ ، ٤ ، ١٠ ، ٢٠ باللون الأزرق.



تسمّى هذه الأعداد بالأعداد رباعية الوجوه.

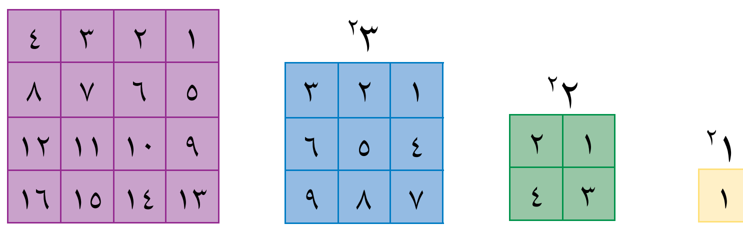
يوجد في مثلث باسكال العديد من الأنماط العددية الأخرى.

أي الأنماط العددية يمكنك أن تجد؟

مُساعَدة

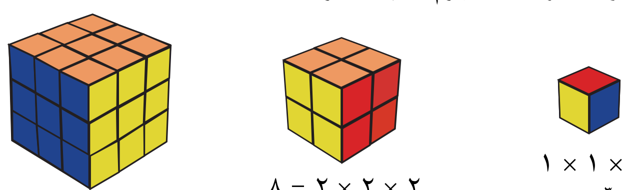
غالبًا ما يكون لأسماء بعض المتتاليات الخاصة جذورها الهندسية، كالأعداد والمربعات الكاملة، وعلينا التفكير فيها كمساحات مربعات أطوال أضلاعها أعداد صحيحة.

$١^{٢}$ $٢^{٢}$ $٣^{٢}$ $٤^{٢}$



١ × ١ = ١   ٢ × ٢ = ٤   ٣ × ٣ = ٩   ٤ × ٤ = ١٦

الأعداد والمكعبات الكاملة والتفكير فيها كحجوم مكعبات أطوال أضلاعها أعداد صحيحة.

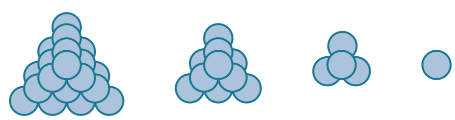


١ × ١ × ١
$١^{٣}$ = ١

٢ × ٢ × ٢ = <u>٨</u>
$٢^{٣}$ = ٨

٣ × ٣ × ٣ = <u>٢٧</u>
$٣^{٣}$ = ٢٧

الأعداد رباعية الوجوه والتفكير فيها ككرات يوضع بعضها فوق بعض لتكون مجسمات رباعية الوجوه.



١   ٤   ١٠   ٢٠

مثـــال ١

استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك $(س + ١)^{٣}$

الحـــلّ:

$(س + ١)^{٣}$

الأس = ٣

مثلث باسكال

القوة ٣ لذا استخدم الصف ٣ وهو ١، ٣، ٣، ١، من مثلث باسكال.

١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١
١ ٤ ٦ ٤ ١
١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١
١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١
١ ٧ ٢١ ٣٥ ٣٥ ٢١ ٧ ١

$(س + ١)^{٣} = ١س^{٣} + ٣س^{٢}(١) + ٣س(١)^{٢} + ١(١)^{٣}$

$= س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ١$

باستخدام
$١أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ١ب^{٣}$

مُساعَدة

عندما يتم إيجاد مفكوك $(س + أ)^{ن}$، حيث أ قيمة عددية، يكون أي حد ثابت حدًا خاليًا من س

في المثال ١، الحد الثابت هو ١، وهو حد خالٍ من س

مثــال ٢

استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك كل مما يأتي:

أ (٢ + ٥س)^{٣} ب (٢س − ٣)^{٤}

الحــلّ:

أ (٢ + ٥س)^{٣}

الأس = ٣

الصف الثالث في مثلّث باسكال هو (١، ٣، ٣، ١)

(٢ + ٥س)^{٣} = ١(٢)^{٣} + ٣(٢)^{٢}(٥س) + ٣(٢)(٥س)^{٢} + ١(٥س)^{٣}

= ٨ + ٦٠س + ١٥٠س^{٢} + ١٢٥س^{٣}

استخدم الصف الثالث في مثلث باسكال

باستخدام مفكوك (أ + ب)^{٣}

ب (٢س − ٣)^{٤}

الأس = ٤

الصف الرابع في مثلّث باسكال هو (١، ٤، ٦، ٤، ١)

(٢س − ٣)^{٤} = ١(٢س)^{٤} + ٤(٢س)^{٣}(−٣) + ٦(٢س)^{٢}(−٣)^{٢} + ٤(٢س)(−٣)^{٣} + ١(−٣)^{٤}

= ١٦س^{٤} − ٩٦س^{٣} + ٢١٦س^{٢} − ٢١٦س + ٨١

استخدم الصف الرابع في مثلث باسكال

باستخدام مفكوك (أ + ب)^{٤}

مثــال ٣

استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك (٢ − س)^{٥}

الحــلّ:

(٢ − س)^{٥}

الأس = ٥

استخدم الصف الخامس في مثلث باسكال.

الصف الخامس في مثلث باسكال هو (١، ٥، ١٠، ١٠، ٥، ١)

(٢ − س)^{٥} = ١(٢)^{٥} + ٥(٢)^{٤}(−س) + ١٠(٢)^{٣}(−س)^{٢} + ١٠(٢)^{٢}(−س)^{٣} + ٥(٢)(−س)^{٤} + ١(−س)^{٥}

= ٣٢ − ٨٠س + ٨٠س^{٢} − ٤٠س^{٣} + ١٠س^{٤} − س^{٥}

تمارين ٩-١

١) اكتب الصفَّين السادس والسابع في مثلث باسكال.

٢) استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك كل ممّا يلي:

أ $(١ - س)^{٤}$ ب $(ل + ق)^{٤}$ ج $(٢ + س)^{٣}$ د $(س + ص)^{٥}$

هـ $(ص + ٤)^{٣}$ و $(أ - ب)^{٣}$ ز $(٢س + ص)^{٤}$ ح $(س - ٢ص)^{٣}$

ط $(٣س - ٤)^{٤}$ ي $\left(س + \frac{٢}{س}\right)^{٣}$ ك $\left(س^{٢} - \frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٣}$

٣) استخدم مثلث باسكال لتجد معامل $س^{٣}$ في مفكوك كل ممّا يلي:

أ $(س + ٤)^{٤}$ ب $(١ + س)^{٥}$ ج $(٣ - س)^{٤}$ د $(٣ + ٢س)^{٣}$

هـ $(س - ٢)^{٥}$ و $(٢س + ٥)^{٤}$ ز $(٤س - ٣)^{٥}$ ح $\left(٣ - \frac{١}{٢}س\right)^{٤}$

٤) معامل س في مفكوك $(٢ + أس)^{٣}$ يساوي ٩٦، استخدم مثلث باسكال لتجد قيمة أ

٥) استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك $(٢ - س^{٢})^{٤}$

٦) استخدم مثلث باسكال لتجد معامل س في مفكوك $\left(س - \frac{٣}{س}\right)^{٥}$

٧) أوجد الحدّ الخالي من س في مفكوك $\left(س + \frac{١}{٢س}\right)^{٤}$

٩-٢ مفكوك ذات الحدين باستخدام الحد العام

تعلمت في الدرس السابق كيف تستخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك ذات الحدَّين، مثل $(أ + ب)^{ن}$. إذا كانت قيمة ن صغيرة فهي طريقة مناسبة، وإذا كانت ن كبيرة فإن كتابة الصف الملائم من مثلث باسكال غير فاعلة، وتكون عرضة للأخطاء. يمكن أن تستفيد من الحاسبة إذا كانت تتضمن دالة التوافيق لتجد أيّة قيمة في أيّ صف من مثلث باسكال.

$$\binom{٠}{٠}$$
$$\binom{١}{٠} \quad \binom{١}{١}$$
$$\binom{٢}{٠} \quad \binom{٢}{١} \quad \binom{٢}{٢}$$
$$\binom{٣}{٠} \quad \binom{٣}{١} \quad \binom{٣}{٢} \quad \binom{٣}{٣}$$
$$\binom{٤}{٠} \quad \binom{٤}{١} \quad \binom{٤}{٢} \quad \binom{٤}{٣} \quad \binom{٤}{٤}$$

باستخدام الحاسبة:

$$\binom{٥}{٠} = ١،\ \binom{٥}{١} = ٥،\ \binom{٥}{٢} = ١٠،\ \binom{٥}{٣} = ١٠،\ \binom{٥}{٤} = ٥،\ \binom{٥}{٥} = ١$$

هذه الأعداد الموجودة هي الأعداد نفسها الموجودة في الصف الخامس في مثلث باسكال.

وعليه يكون مفكوك $(أ + ب)^{٥}$ يساوي:

$$(أ + ب)^{٥} = \binom{٥}{٠}أ^{٥} + \binom{٥}{١}أ^{٤}ب + \binom{٥}{٢}أ^{٣}ب^{٢} + \binom{٥}{٣}أ^{٢}ب^{٣} + \binom{٥}{٤}أب^{٤} + \binom{٥}{٥}ب^{٥}$$

ويمكن كتابة ذلك بصورة عامة على النحو:

$$(أ + ب)^{ن} = \binom{ن}{٠}أ^{ن} + \binom{ن}{١}أ^{ن-١}ب + \binom{ن}{٢}أ^{ن-٢}ب^{٢} + \binom{ن}{٣}أ^{ن-٣}ب^{٣} + \dots + \binom{ن}{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر} + \dots + \binom{ن}{ن}ب^{ن}$$

لكن قيمة $\binom{ن}{٠} = ١$، وكذلك $\binom{ن}{ن} = ١$، لذا يمكن تبسيط الصيغة إلى:

$$أ^{ن} + \binom{ن}{١}أ^{ن-١}ب + \binom{ن}{٢}أ^{ن-٢}ب^{٢} + \dots + \binom{ن}{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر} + \dots + ب^{ن}$$

نتيجة ١

إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا، $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ فإن

$$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + \binom{ن}{١}أ^{ن-١}ب + \binom{ن}{٢}أ^{ن-٢}ب^{٢} + \binom{ن}{٣}أ^{ن-٣}ب^{٣} + \dots + \binom{ن}{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر} + \dots + ب^{ن}$$

أي أن $(أ + ب)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر}ب^{ر}$

وتُعرف هاتان الصيغتان **بنظرية ذات الحدّين** **binomial theorem**.

في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$، الحد الذي يتضمّن $ب^{ر}$ يكتب في صيغة $\binom{ن}{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر}$

مثـــال ٤

استخدم نظرية ذات الحدَّين لتجد مفكوك $(١ + س)^{٥}$

الحـــلّ:

$$(١ + س)^{٥} = \binom{٥}{٠}١^{٥}س^{٠} + \binom{٥}{١}١^{٤}س^{١} + \binom{٥}{٢}١^{٣}س^{٢} + \binom{٥}{٣}١^{٢}س^{٣} + \binom{٥}{٤}١^{١}س^{٤} + \binom{٥}{٥}١^{٠}س^{٥}$$
$$= ١ + ٥ \times ١س + ١٠ \times ١س^{٢} + ١٠ \times ١س^{٣} + ٥ \times ١س^{٤} + ١س^{٥}$$
$$= ١ + ٥س + ١٠س^{٢} + ١٠س^{٣} + ٥س^{٤} + س^{٥}$$

مُساعَدة

تذكّر $س^{٠} = ١$

مُساعَدة

يمكن إيجاد قيمة $\binom{٥}{٣}$ باستخدام المفاتيح $\boxed{5}\ \boxed{nCr}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ على الحاسبة.

مثــال ٥

استخدم نظرية ذات الحدين لتجد مفكوك $(٤س + ٣)^{٦}$

الحــلّ:

$$(٤س + ٣)^{٦} = (٤س)^{٦} + \binom{٦}{١}(٤س)^{٥}\,٣^{١} + \binom{٦}{٢}(٤س)^{٤}\,٣^{٢} + \binom{٦}{٣}(٤س)^{٣}\,٣^{٣} + \binom{٦}{٤}(٤س)^{٢}\,٣^{٤} + \binom{٦}{٥}(٤س)^{١}\,٣^{٥} + ٣^{٦}$$

$$= ٤٠٩٦س^{٦} + ١٨٤٣٢س^{٥} + ٣٤٥٦٠س^{٤} + ٣٤٥٦٠س^{٣} + ١٩٤٤٠س^{٢} + ٥٨٣٨س + ٧٢٩$$

مثــال ٦

أوجد معامل $س^{٢٠}$ في مفكوك $(٢ - س)^{٢٥}$

الحــلّ:

الحدّ الذي يحتوي على $س^{٢٠} = \binom{٢٥}{٢٠} \times ٢^{٥} \times (-س)^{٢٠}$

$= ٥٣١٣٠ \times ٣٢ \times س^{٢٠}$

$= ١٧٠٠١٦٠س^{٢٠}$

فيكون معامل $س^{٢٠} = ١٧٠٠١٦٠$

استخدم $\binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$ حيث أ = ٢، ب = −س، ن = ٢٥، ر = ٢٠

١٠٩

تمارين ٩-٢

١) اكتب كل صفّ من صفوف مثلث باسكال الآتية مستخدمًا صيغة التوافيق:

أ) الصف ٣ ب) الصف ٤ ج) الصف ٥

٢) استخدم الحد العام لنظرية ذات الحدين لتجد مفكوك ما يلي:

أ) $(س + ١)^{٤}$ ب) $(١ - س)^{٥}$ ج) $(١ + ٢س)^{٤}$ د) $(٣ + س)^{٣}$

هـ) $(س + ص)^{٤}$ و) $(٢ - س)^{٥}$ ز) $(أ - ٢ب)^{٤}$ ح) $(٢س + ٣ص)^{٤}$

ط) $\left(\frac{١}{٢}س - ٣\right)^{٤}$ ي) $\left(١ - \frac{س}{١٠}\right)^{٥}$ ك) $\left(س - \frac{٣}{س}\right)^{٥}$ ل) $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٦}$

٣) أوجد الحدّ الذي يحتوي $س^{٣}$ في مفكوك ما يلي:

أ) $(٢ + س)^{٥}$ ب) $(٥ + س)^{٨}$ ج) $(٣ + ٢س)^{٥}$ د) $(١ - س)^{٦}$

هـ) $(٢ - س)^{٩}$ و) $(١٠ - ٣س)^{٧}$ ز) $(٤ - ٥س)^{١٥}$

٤) استخدم نظرية ذات الحدين لتجد أول ثلاثة حدود في ما يلي:

أ) $(١ + س)^{١٠}$ ب) $(١ - ٣س)^{٧}$ ج) $(٣ - س)^{٩}$

د) $\left(٢ + \frac{١}{٢}س\right)^{٨}$ هـ) $(٥ - س^{٢})^{٩}$ و) $(٤س - ٥ص)^{١٠}$

٥) اكتب أوّل أربعة حدود من مفكوك $(١ + ٢س)^{٦}$ بحسب قوى س التنازلية.

٦) أوجد معامل $\frac{١}{س}$ في مفكوك ذات الحدين $\left(٢س - \frac{١}{س^{٣}}\right)^{٥}$

٧) أوجد الحد الخالي من س (الحد الثابت) في مفكوك ذات الحدين $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{٩}$

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

مفكوك ذات الحدّين

إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإنه يمكن إيجاد مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ باستخدام الصيغة:

$$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{١}\text{أ}^{\text{ن} - ١}\text{ب} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{أ}^{\text{ن} - ٢}\text{ب}^{٢} + \binom{\text{ن}}{٣}\text{أ}^{\text{ن} - ٣}\text{ب}^{٣} + \ldots + \binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{\text{ن} - \text{ر}}\text{ب}^{\text{ر}} + \ldots + \text{ب}^{\text{ن}}$$

في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$، الحد الذي يتضمّن $\text{ب}^{\text{ر}}$ يكتب في صيغة $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{\text{ن} - \text{ر}}\text{ب}^{\text{ر}}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة التاسعة

١) أوجد أول أربعة حدود في مفكوك $(٢ + س)^{٦}$ مرتبة تصاعديًا بحسب قوى س

٢) أوجد أول ثلاثة حدود مرتبة تنازليًا بحسب قوى س في مفكوك $\left(س + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{٦}$

٣) أوجد معامل $س^{٣}$ في مفكوك $\left(١ - \frac{س}{٢}\right)^{١٢}$

٤) أوجد أول أربعة حدود في مفكوك $(٢ + س^{٢})^{٦}$ مرتبة تصاعديًا بحسب قوى س

٥) اكتب أول ثلاثة حدود في مفكوك $(٣ + ٢س)^{٦}$ مرتّبة تصاعديًا بحسب قوى س، واكتب كلّ حدّ في أبسط صورة.

٦) في مفكوك $(أ + ٢س)^{٦}$ معامل س يساوي معامل $س^{٢}$، أوجد قيمة الثابت أ

٧) في مفكوك $(٢ + أس)^{٧}$، حيث أ عدد ثابت، معامل س هو -٢٢٤٠؛ أوجد معامل $س^{٢}$

٨) أوجد أول ثلاثة حدود في مفكوك $(١ + لس)^{٨}$ مرتّبة تصاعديًا بحسب قوى س

٩) أوجد الحدود الثلاثة الأولى مرتبة تصاعديًا بحسب قوى س في مفكوك:

أ $(١ + ٢س)^{٥}$

ب $(٣ - س)^{٥}$

مصطلحات علمية

أ

إبدالية commutative: هو المبدأ الذي يشرح أن ترتيب الحدود ليس له أهمية عند القيام بالعمليات الرياضية. (عملية جمع المصفوفات إبدالية حيث $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$). (ص ٥٢)

الأساس base: عدد أو متغير مرفوع إلى قوة: مثلًا $٥^{٢}$، الأساس هو ٥ (ص ٢٠)

الأسّ exponent: القوة، مثلًا $٥^{٢}$، الأس هو ٢ (ص ٢٠)

الأعمدة columns: ترتيبات رأسية لعناصر معينة. (ص ٤٧)

ت

التباديل permutations: التراتيب المختلفة التي يمكن بها أن نختار العناصر ونرتبها. (ص ٨٠)

التوافيق combinations: هي اختيار عناصر من مجموعة تتألف من عناصر متمايزة بحيث لا يهم ترتيب الاختيارات (على عكس التباديل). (ص ٩٣)

ر

الرتبة order of a matrix: تحدد رتبة المصفوفة من خلال عدد الصفوف × عدد الأعمدة. (ص ٤٧)

ص

الصفوف rows: ترتيبات أفقية لعناصر معينة. (ص ٤٧)

ض

الضرب القياسي multiplying a matrix by a scalar: عملية ضرب المصفوفة في عدد. (ص ٥٤)

ضرب المصفوفات matrix multiplication: تشير تحديدًا إلى ضرب مصفوفة في أخرى. (ص ٥٤)

ع

العدد القياسي scalar: عدد حقيقي يُضرب في جميع عناصر المصفوفة. (ص ٥٤)

العنصر element: هو عدد أو عبارة رياضية أدخلت إلى المصفوفة. (ص ٤٧)

غ

غير إبدالية not commutative: هو المبدأ الذي يشرح أن ترتيب الحدود مهم عند القيام بالعمليات الرياضية. (نقول إن عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية). (ص ٦٠)

غير منفردة non-singular: تشير إلى أي مصفوفة محددها لا يساوي الصفر. (ص ٦٦)

ق

القطر الثانوي minor diagonal: العناصر التي تقع على الخط من الزاوية العليا إلى اليسار إلى الزاوية السفلى إلى اليمين في المصفوفة المربعة. (ص ٦٦)

القطر الرئيسي major diagonal: العناصر التي تقع على الخط من الزاوية العليا إلى اليمين إلى الزاوية السفلى إلى اليسار في المصفوفة المربعة. (ص ٦٦)

قيود restrictions: هي الشروط التي يمكن أن توضع على اختيار أو ترتيب ما. (ص ٨٦)

ل

اللوغاريتم logarithm: هو قوة أو أس. (ص ٢٠)

اللوغاريتم الاعتيادي common logarithm: هو لوغاريتم ذو الأساس ١٠؛ يُكتب اللوغاريتم ذو الأساس ١٠ لـ س في صورة لـو س. (ص ٢٥)

م

مثلث باسكال Pascal’s triangle: تشكيل مثلثي من معاملات ذات الحدَّين يبدأ فيه كل صف وينتهي بالرقم واحد، كل عدد يتكوّن من مجموع العددَين اللذين فوقه. (ص ١٠٤)

محدد determinant: ناتج ضرب عناصر القطر الرئيسي ناقص ناتج ضرب عناصر القطر الثانوي. (ص ٦٦)

مختلفة distinct: نصف مجموعة عناصر بأنها مختلفة إذا لم يكن أي منها مطابقًا للآخر. (ص ٨٠)

المصفوفات matrices: هي ترتيب للقيم في شكل صفوف وأعمدة داخل أقواس. (ص ٤٧)

المصفوفة العمودية column matrix: تتكوّن من عمود واحد وأي عدد من الصفوف. (ص ٤٧)

المصفوفة الصفية row matrix: تتكوّن من صف واحد وأي عدد من الأعمدة. (ص ٤٧)

المصفوفة المحايدة identity matrix: مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ نشير إليها بالحرف <u>م</u>
ولأية مصفوفة مربعة <u>أ</u> لها نفس ترتيب <u>م</u> يكون <u>أ</u> <u>م</u> = <u>م</u> <u>أ</u> = <u>أ</u>. (ص ٦٢)

المصفوفة المربعة square matrix: تتكوّن من عدد متساوٍ من الأعمدة والصفوف. (ص ٤٧)

المصفوفة الصفرية zero matrix: أي مصفوفة تكون كل عناصرها مساوية للصفر. (ص ٤٨)

معادلة لوغاريتمية logarithmic equation: معادلة تحتوي على مصطلح لوغاريتمي توجد فيه قيمة مجهولة يمكن إيجادها، مثل لـو$_{س}$ ٦ = ٣، لـو$_{٢}$ س = ١,٥ أو لـو ٣^{س} = ٢ (ص ٣٣)

منفردة singular: تشير إلى أي مصفوفة مربعة محددها يساوي الصفر. (ص ٦٦)

مضروب العدد الصحيح الموجب ن factorial: هو حاصل ضرب كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي ن. ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن عدد صحيح > ٠ (ص ٧٦)

معكوس inverse: المصفوفة المربعة (٢ × ٢) <u>أ</u> هو المصفوفة <u>أ</u>$^{-١}$، بحيث يكون حاصلَي الضرب <u>أ</u> <u>أ</u>$^{-١}$ ، <u>أ</u>$^{-١}$ <u>أ</u> يساويان المصفوفة المحايدة <u>م</u>. (ص ٦٨)

مكرر repetition: عندما يظهر العنصر نفسه أكثر من مرة. (ص ٨٣)

ن

نظرية ذات الحدّين binomial theorem: قانون إيجاد الحد العام في مفكوك (أ + ب)^{ن}. (ص ١٠٨)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Marianna Armata/Getty Images; Ann Monn/Getty Images; Andrew Spencer/ via Wikimedia Commons; Surasak 4.0 Getty Images; Michel Bakni CC-BY-SA Suwanmake/Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع:

٦٨١٣/٢٠٢٣

طبع بالمطابع الفنية، سلطنة عُمان – هاتف: ٢٤٨١٤١٥٣

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات الأساسية للصف الحادي عشر أيضًا:

– كتاب النشاط.
– دليل المعلّم.

ISBN 978-99969-890-3-2

9 789996 989032 >

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om