سلطنة عُمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عُمان 2040

نتقدم بثقة
Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1445هـ -2023م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الطبعة التجريبية 1445 هـ - 2023 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف الحادي عشر - من سلسلة
كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 -
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 و Probability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمرز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

المغفور لـه

السلطان قابوس بن سعيد

-طيّب اللّه ثراه-

حضـرة صـاحب الجـلالـة

السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم

-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

(المحافظات والولايات)

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا   جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلاً مُمَجَّدًا

بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

الوحدة التاسعة: التوزيع الاحتمالي

الوحدة العاشرة: توزيع ذي الحدّين والتوزيع الهندسي

الوحدة الحادية عشرة: الهندسة ثلاثية الأبعاد

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ أو ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧-١ تذكر القيمة المطلقة لأي عدد أو عبارة معطاة وتستخدمها.
٧-٢ تعرّف دالة الصحيح وتستخدمها.
٧-٣ ترسم منحنيات دالة المطلق ودالة الصحيح، وتستخدمها لحل المسائل.
٧-٤ تحوّل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية ذات الأساس العام 'أ'
٧-٥ تبسّط اللوغاريتمات باستخدام قوانين اللوغاريتم، مع ثبات الأساس.
٧-٦ تحوّل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية ذات الأساس ١٠
٧-٧ تفهم خصائص كل من $هـ^{س}$ و لط (س) ومنحنياتهما، والعلاقة بينهما كدوال عكسية.
٧-٨ تحل المعادلات الأسية.
٧-٩ تحل المعادلات اللوغاريتمية.

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

معكوس الدالة الأسية د (س) = $أ^{س}$ هو س = $أ^{ص}$، يمكن كتابته باستخدام تعريف اللوغارتيم كالتالي:
$د^{-١}$(س) = $لو_{أ}$ س وتقرأ لوغاريتم س للأساس أ حيث س > ٠، أ > ٠، أ ≠ ١
مجال الدالة اللوغاريتمية هو س > ٠ (مدى الدالة الأسية)

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

القيمة المطلقة

absolute value

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

حدّد ما إذا كانت العبارات أدناه، حيث أ، ب ∈ ع:

صحيحة دائمًا | صحيحة أحيانًا | لا تصح أبدًا

١) |أ + ب| = |أ| + |ب|
٢) |أ − ب| = |أ| − |ب|
٣) |أ − ب| = |ب − أ|
٤) |أ ب| = |أ| × |ب|
٥) $\left|\frac{أ}{ب}\right|$ = |أ| ÷ |ب| حيث ب ≠ ٠
٦) $|أ|^{٢}$ = $أ^{٢}$
٧) $|أ|^{ن}$ = $أ^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثامن الوحدة الأولى، والصف التاسع الوحدة الثالثة. والصف الحادي عشر الوحدة الأولى	تستخدم الأسس الموجبة والسالبة والكسريّة والصفرية وتفسّرها.	١) أوجد: أ $٥^{-٢}$ ب $٨^{\frac{٢}{٣}}$ ج $٧^{٠}$ ٢) حل $٣٢^{س}$ = ٢

المفردات

القيمة المطلقة
absolute value
دالة المطلق
absolute function
صحيح العدد
greatest integer

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثـال ١

حلّ المعادلات الآتية:

أ |س| = ٤
ب |٢س − ١| = ٣
ج |س − ٤| = ٢س + ١

الحـلّ:

أ |س| = ٤
إما س = ٤ أو س = −٤
ب |٢س − ١| = ٣

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

ليس من الضروري كتابة الأساس عندما تكون قيمته تساوي ١٠ أي أن:

لـو$_{١٠}$ س = لـو س

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

هل تعلم؟

يرجع الفضل لاكتشاف علم اللوغاريتمات إلى العالم المسلم أبي عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (٧٨١م-٨٤٧م)، وهو علم يختص بحل المسائل المعقدة المختلفة، وما زال يُستخدم حتى الآن.

هل تعلم؟ تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

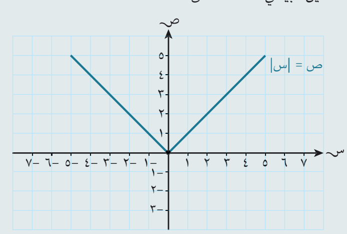
قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

دالّة المطلق:

- تُعَرّف دالّة المطلق كالآتي:

|س| = { س ، س ⩾ ٠ ؛ −س ، س < ٠

التمثيل البياني لدالة المطلق:



عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة السابعة

1) حلّ المعادلة |٢س − ٣| = |٥س + ١|
2) حلّ المعادلة |س^{٢} − ١٤| = ١١
3) استخدم التمثيل البياني لتحل المعادلة [س] = ٤ − ٢س
4) إذا كان لـو$_{هـ}$ن = ٢ لـو$_{هـ}$ك − لـو$_{هـ}$ (٣ + ك)، ك > ٠، فعبّر عن ن بدلالة ك دون استخدام رمز اللوغاريتم.
5) ★ استخدم اللوغاريتمات لتحل المعادلة:
   ٥$^{(س + ٣)}$ = ٧$^{(س − ١)}$
   واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية.
6) حل المعادلة ٦ × ٤^{س} − ١١ × ٢^{س} + ٤ = ٠، اكتب إجابتك بدلالة رمز اللوغاريتم حيث يقتضي ذلك.

الوحدة السابعة
المزيد من الدوال
More Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧-١ تتذكر القيمة المطلقة لأي عدد أو عبارة معطاة وتستخدمها.

٧-٢ تعرّف دالة الصحيح وتستخدمها.

٧-٣ ترسم منحنيات دالة المطلق ودالة الصحيح، وتستخدمها لحل المسائل.

٧-٤ تحوّل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية ذات الأساس العام 'أ'

٧-٥ تبسّط اللوغاريتمات باستخدام قوانين اللوغاريتم، مع ثبات الأساس.

٧-٦ تحوّل بين الصورة اللوغاريتمية والصورة الأسية ذات الأساس ١٠

٧-٧ تفهم خصائص كل من $هـ^{س}$ و لط (س) ومنحنياتهما، والعلاقة بينهما كدوال عكسية.

٧-٨ تحل المعادلات الأسية.

٧-٩ تحل المعادلات اللوغاريتمية.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثامن الوحدة الأولى، والصف التاسع الوحدة الثالثة. والصف الحادي عشر الوحدة الأولى	تستخدم الأسس الموجبة والسالبة والكسريّة والصفرية وتفسّرها.	١) أوجد: أ $٥^{-٢}$ ب $٨^{\frac{٢}{٣}}$ ج $٧^{٠}$ ٢) حل $٣٢^{س} = ٢$
الصف التاسع الوحدتان الثالثة والخامسة عشرة	تستخدم قوانين الأسس.	٣) بسّط: أ $٣س^{-٤} \times \frac{٢}{٣}س^{\frac{١}{٢}}$ ب $\frac{٢}{٥}س^{\frac{١}{٢}} \div ٢س^{-٢}$ ج $\left(\frac{٢س^{٥}}{٣}\right)^{٣}$ ٤) أ حوِّل $\sqrt{٥}$ إلى الصورة الأسية ب اكتب $٩^{\frac{١}{٣}}$ في الصورة الجذرية

المفردات

القيمة المطلقة absolute value

دالة المطلق absolute function

صحيح العدد greatest integer

دالة الصحيح greatest integer function

اللوغاريتم logarithm

الدالة اللوغاريتمية logarithmic function

اللوغاريتم الاعتيادي logarithm of base 10

الدالة الأسية الطبيعية natural exponential function

اللوغاريتم الطبيعي natural logarithm

لماذا ندرس المزيد من الدوال؟

نحتاج في كثير من المواقف إلى إيجاد الفرق بين قيمتين. مثال ذلك البعد بين عددين على خط الأعداد، والمسافة الرأسية بين طائرتين لحظة مرور إحداهما فوق الأخرى. فعند إيجاد البعد بينهما فقد تكون الإجابة عددًا سالبًا. لذا نستخدم مطلق العدد لتحويل العدد السالب إلى عدد موجب للقيمة نفسها.

في الصفوف السابقة، قمنا بتقريب الأعداد إلى أقرب عدد صحيح كامل أو للعدد نفسه إذا كان عددًا صحيحًا كاملًا. هذا يعني أننا نقرب في بعض الأحيان إلى الأعلى (إذا كان الرقم التالي هو ٥ أو أكثر)، وأحيانًا نقرب إلى الأدنى (إذا كان الرقم التالي أقل من ٥). في بعض الأحيان يكون من المفيد التقريب إلى الأدنى – بغض النظر عن قيمة الرقم التالي – وهذا هو صحيح العدد.

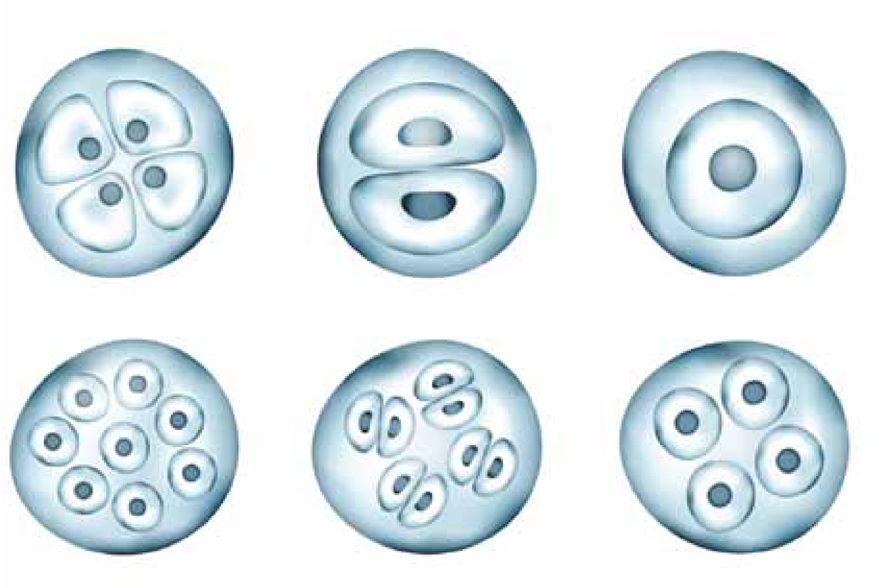
تعلمت في الوحدة السادسة من الصف التاسع كيف تحل بعض المعادلات الأسيّة البسيطة. مثلاً $٢^{س} = ٣٢$، وستتعلم في هذه الوحدة كيف تحل معادلات أسيّة أكثر صعوبة مثل $أ^{س} = ب$ حيث لا توجد طريقة لكتابة العددَين أ، ب في صورة أسيّة للأساس نفسه. لتكون قادرًا على اكتساب هذه المهارة ستتعلم نوعًا جديدًا من طرق حل المعادلات، وذلك باستخدام ما يسمى باللوغاريتمات. كما أنك ستتعلم نوعًا جديدًا من الدوال تُسمى بالدوال اللوغاريتمية، وتُعتبر الدالة اللوغاريتمية دالة عكسية للدالة الأسية.

لماذا ندرس اللوغاريتمات؟

يُرجح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض، ويستخدم الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها على كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستخدام اللوغاريتمات، إذ يمكن إيجاد مقياس باليرمو لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

كما تعلمت في الوحدة الخامسة عشرة من الصف التاسع دوال النمو والاضمحلال الأسّي وتطبيقاتهما في مواقف حياتية متنوعة مثل الاستثمار والسكّان وانشطار الخلايا. ثمّة تطبيقات في الحياة اليومية للدوال اللوغاريتمية مثل الطاقة التي تنبعث عند حدوث الهزّة الأرضية على 'مقياس ريختر' Richter. من أشهر ظواهر دالة اللوغاريتم في الطبيعة، الشكل الحلزوني الذي يمكن مشاهدته في صدفة نوتيلوس nautilus shell. ونشاهد شكل الدالة اللوغاريتمية أيضًا في المجرّات الحلزونية وفي النباتات مثل دوّار الشمس.

يوضح الشكل الآتي تقسيم الخلايا، حيث تتقسم وتنتج ضعف عدد الخلايا بعد فترة زمنية معينة، إنه مثال على النمو الأسي.



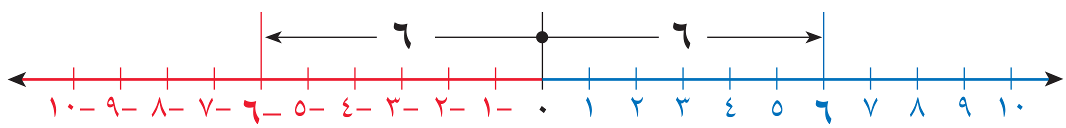
١-٧ دالة المطلق

القيمة المطلقة (**absolute value**) للعدد أ هي المسافة بين العدد أ والصفر على خط الأعداد.

ويرمز إليها بالرمز |أ|، ويقرأ 'مطلق العدد أ' وهي قيمة موجبة دائمًا أو تساوي الصفر بحيث:

|أ| = |−أ|

يبيّن خط الأعداد الآتي |٦| = |−٦| = ٦:



فيما يأتي بعض الأمثلة على القيم المطلقة:

|٠| = ٠

|−٣| = ٣

|٢,٥| = ٢,٥

$|\sqrt{٨}| = \sqrt{٨}$

$\left|-\frac{٢}{٣}\right| = \frac{٢}{٣}$

وتكتب **دالة المطلق absolute function** على الشكل د(س) = |س|، وتعرّف حسب الصيغة:

$$\text{د(س)} = |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \quad \text{س} \geqslant ٠ \\ -\text{س} & ، \quad \text{س} < ٠ \end{cases}$$

حيث مجالها هو ع ومداها د(س) ⩾ ٠

مُساعَدة

يمكن وضع الرمز (=) في أحد الرمزين < أو >

استكشف ١

حدّد ما إذا كانت العبارات أدناه، حيث أ، ب ∈ ع:

صحيحة دائمًا — صحيحة أحيانًا — لا تصح أبدًا

١) |أ + ب| = |أ| + |ب|

٢) |أ − ب| = |أ| − |ب|

٣) |أ − ب| = |ب − أ|

٤) |أ ب| = |أ| × |ب|

٥) $\left|\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right|$ = |أ| ÷ |ب| حيث ب ≠ ٠

٦) $|\text{أ}|^{٢} = \text{أ}^{٢}$

٧) $|\text{أ}|^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}$، حيث ن عدد صحيح موجب

- إذا كنت تعتقد أن عبارة ما هي **صحيحة دائمًا** أو **لا تصح أبدًا**، فيجب أن تقدم تفسيرًا واضحًا يبرر إجابتك.
- إذا كنت تعتقد أن عبارة ما هي **صحيحة أحيانًا**، فيجب أن تقدم مثالًا على حالة تكون فيها العبارة صحيحة، ومثالًا آخر على حالة تكون فيها العبارة غير صحيحة.

حل معادلات المطلق

تعني العبارة |س| = ك، حيث ك ⩾ ٠، أن س = ك أو س = − ك

تستخدم هذه الخاصية لحل المعادلات التي تتضمن دوالّ المطلق.

- إذا كنت تحل معادلات في الصيغة |أ س + ب| = ك، فيمكنك حل المعادلة باستخدام
  إما أ س + ب = ك أو أ س + ب = − ك
- إذا كنت تحل معادلات في الصيغة |أ س + ب| = ج س + د، فيمكنك حل المعادلة باستخدام
  إما أ س + ب = جس + د أو أ س + ب = − (ج س + د)

عندما تحل مثل هذه المعادلات، فعليك أن تتحقق من أن إجاباتك تحقق المعادلة الأصلية.

مثـــال ١

حلّ المعادلات الآتية:

أ |س| = ٤

ب |٢س − ١| = ٣

ج |س − ٤| = ٢س + ١

الحـــلّ:

أ |س| = ٤

إما س = ٤ أو س = −٤

ب |٢س − ١| = ٣

إما ٢س − ١ = ٣ أو ٢س − ١ = −٣

٢س = ٤ أو ٢س = −٢

س = ٢ أو س = −١

تحقّق: عندما س = ٢: |٢ × ٢ − ١| = ٣ ✓

عندما س = −١: |٢ × (−١) − ١| = ٣ ✓

الحل هو: س = −١ أو س = ٢

ج |س − ٤| = ٢س + ١

إما س − ٤ = ٢س + ١ أو س − ٤ = −(٢س + ١)

س = −٥ أو ٣س = ٣

س = ١

تحقّق: عندما س = −٥: |−٥ − ٤| = ٢ × (−٥) +١ ✗

عندما س = ١: |١ − ٤| = ٢ × ١ + ١ ✓

الحل هو: س = ١

استكشف ٢

يمكنك كتابة أ^{٢} − ب^{٢} على الصورة |أ|^{٢} − |ب|^{٢} باستخدام الخاصية |أ|^{٢} = أ^{٢}

وباستخدام الفرق بين مربّعَين، يمكن كتابة:

أ^{٢} − ب^{٢} = |أ|^{٢} − |ب|^{٢} = (|أ| − |ب|)(|أ| + |ب|)

باستخدام العبارة أعلاه، اشرح كيفية الحصول على النتيجة الآتية:

- |أ| = |ب| ⟺ أ^{٢} = ب^{٢} (الرمز ⟺ يعني 'إذا وفقط إذا كان')

لحل المعادلات التي في الصيغة |ج س + د| = |هـ س + و|، يمكنك استخدام:

- |أ| = |ب| ⟺ إما أ = ب أو أ = −ب
- |أ| = |ب| ⟺ أ^{٢} = ب^{٢}

مثـال ٢

حلّ المعادلة |٣س + ٤| = |س + ٥|

الحـلّ:

الطريقة ١

|٣س + ٤| = |س + ٥| .... استخدم الخاصية |أ| = |ب| ⟺ أ = ب أو أ = −ب

إما ٣س + ٤ = س + ٥ أو ٣س + ٤ = −(س + ٥)

٢س = ١ أو ٤س = −٩

س = $\frac{١}{٢}$ س = −$\frac{٩}{٤}$

تحقّق: عندما س = $\frac{١}{٢}$: |٣ × $\frac{١}{٢}$ + ٤| = |$\frac{١}{٢}$ + ٥| ✓

عندما س = −$\frac{٩}{٤}$: |٣ × (−$\frac{٩}{٤}$) + ٤| = |−$\frac{٩}{٤}$ + ٥| ✓

الحل هو: س = $\frac{١}{٢}$ أو س = −$\frac{٩}{٤}$

الطريقة ٢

|٣س + ٤| = |س + ٥| .... استخدم |أ| = |ب| ⟺ أ^{٢} = ب^{٢}

(٣س + ٤)^{٢} = (س + ٥)^{٢}

٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦ = س^{٢} + ١٠س + ٢٥

٨س^{٢} + ١٤س − ٩ = ٠ .... حلّل إلى عوامل.

(٢س − ١)(٤س + ٩) = ٠

الحل هو: س = $\frac{١}{٢}$ أو س = −$\frac{٩}{٤}$

مثـــال ٣

حلّ المعادلة |س + ٣| + |س + ٥| = ١٠

الحـــلّ:

|س + ٣| + |س + ٥| = ١٠	اطرح | س + ٥ | من الجهتَين
|س + ٣| = ١٠ − |س + ٥|	اقسم المعادلة إلى جزأَين
س + ٣ = ١٠ − |س + ٥| .... (١)	الجزء الأول: بأخذ القيمة الموجبة للطرف الأيسر
س + ٣ = |س + ٥| − ١٠ .... (٢)	الجزء الثاني: بأخذ القيمة السالبة للطرف الأيسر

باستخدام المعادلة (١):

−٧ + س + |س + ٥| = ٠

|س + ٥| = ٧ − س	اقسم المعادلة إلى جزأَين

إما س + ٥ = ٧ − س   أو   س + ٥ = −(٧ − س)

٢س = ٢ أو ٠ = −١٢	٠ = −١٢ عبارة خاطئة

س = ١

باستخدام المعادلة (٢):

|س + ٥| = س + ١٣	اقسم المعادلة إلى جزأَين

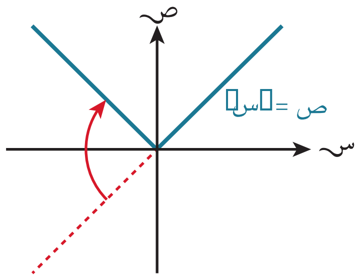
إما س + ٥ = س + ١٣   أو   س + ٥ = − (س + ١٣)

٠ = ٨ أو ٢س = −١٨	٠ = ٨ عبارة خاطئة

س = −٩

الحل هو: س = ١ أو س = −٩

التمثيل البياني لدالة المطلق ص = |د (س)| حيث د (س) دالة خطية



عند رسم بيان الدالة ص = |س|، ارسم أولًا المستقيم ص = س،

ثم قم بعمل انعكاس للجزء الذي يقع تحت المحور السيني (حول المحور السيني).

من خلال الرسم نلاحظ أن مجالها هو ع ومداها هو ص $\geqslant$ ٠

مثــال ٤

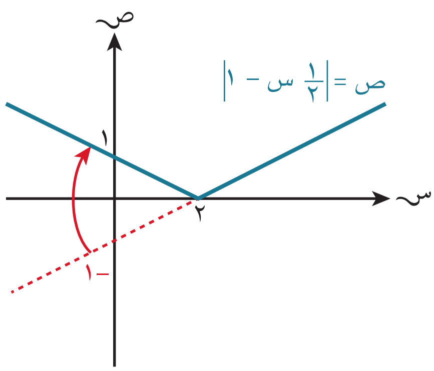
ارسم بيان الدالة ص = $\left|\frac{١}{٢}\right.$ س − ١$\left.\right|$، مبينًا نقاط التقاطع مع المحورَين، ثم أعد تعريف الدالّة من خلال الرسم.

الحــلّ:

ارسم أولًا بيان الدالة ص = $\frac{١}{٢}$ س − ١

ميل المستقيم هو $\frac{١}{٢}$، الجزء المقطوع من المحور الصادي هو −١

ثم قم بعمل انعكاس حول المحور السيني للجزء الذي يقع أسفل المحور السيني.

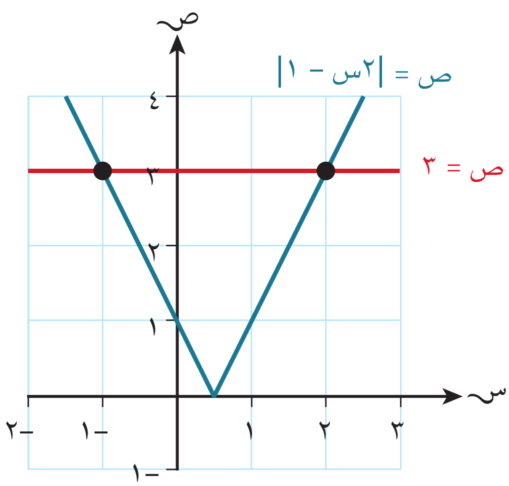


يبيّن التمثيل البياني أنه يمكن كتابة $\left|\frac{١}{٢}\right.$ س − ١$\left.\right|$ على الصيغة:

$$\left|\frac{١}{٢}\text{س} - ١\right| = \begin{cases} \frac{١}{٢}\text{س} - ١ & ،\quad \text{س} \geqslant ٢ \\ -\left(\frac{١}{٢}\text{س} - ١\right) & ،\quad \text{س} < ٢ \end{cases}$$

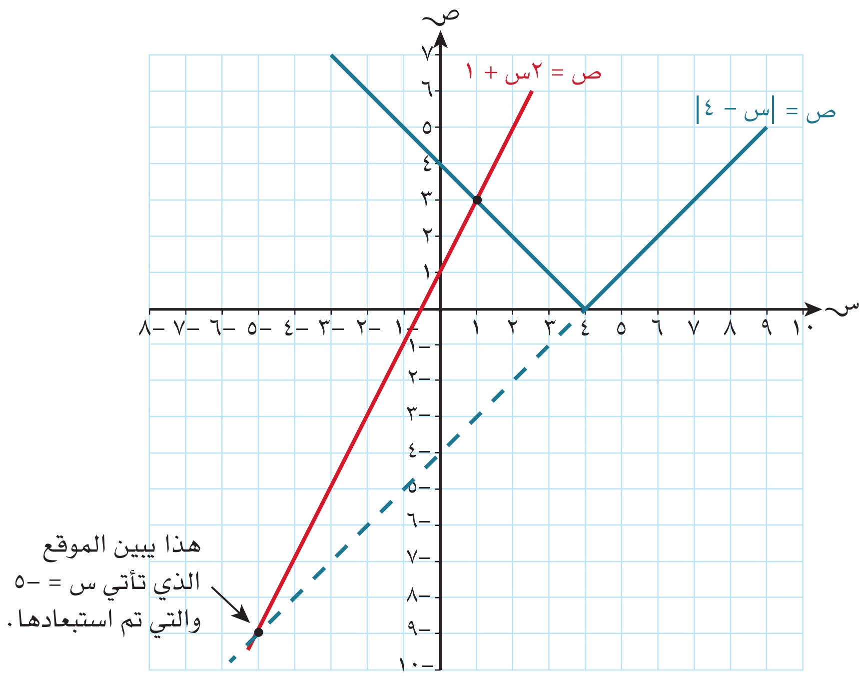
وجدنا في مثال ١ الجزئية (ب) أنه يوجد جذران للمعادلة |٢س − ١| = ٣ هما س = −١، س = ٢

يمكن أيضًا إيجاد الجذرَين بيانيًا من خلال إيجاد الإحداثيات السينية لنقطتَي التقاطع بين ص = |٢س − ١|، ص = ٣ كما هو مبيّن في الشكل أدناه.



أيضًا في مثال ١ الجزئية (ج)، وجدنا أنه يوجد جذر واحد، هو س = ١، للمعادلة |س − ٤| = ٢س + ١.

يمكن إيجاد هذا الجذر بيانيًا من خلال إيجاد الإحداثي السيني لنقطة التقاطع بين ص = |س − ٤|، ص = ٢س + ١ كما هو مبيّن في الشكل أدناه.

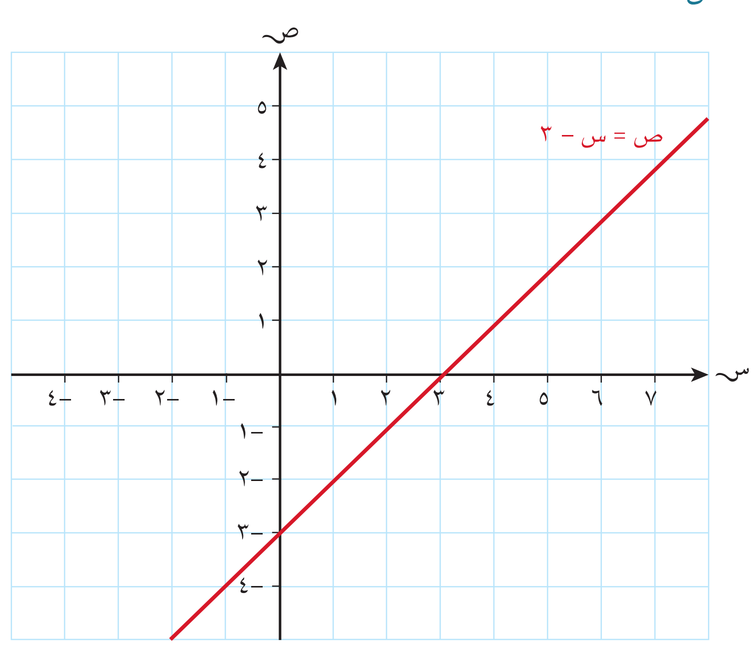


مثـــال ٥

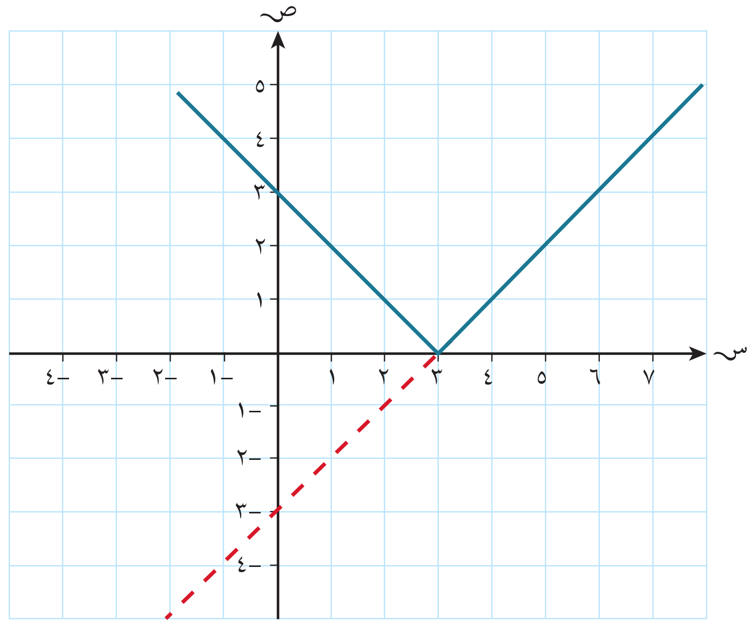
ارسم بيان الدالة ص = |س − ٣| + ٢

الحـــلّ:

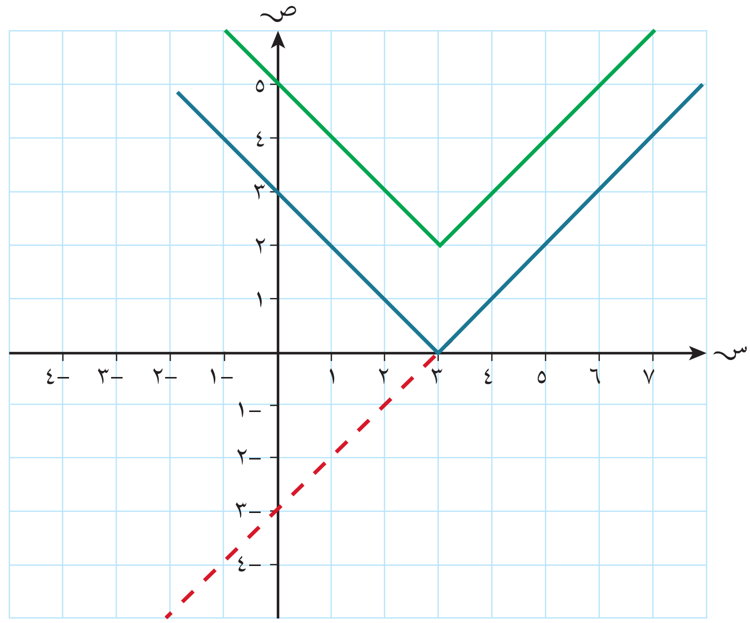
ارسم أولًا المستقيم ص = س − ٣



بعدها، نمثّل بيانيًا الدالة ص = |س − ٣| من خلال إجراء انعكاس للجزء الذي يقع تحت المحور السيني (حول المحور السيني):



أخيرًا، للحصول على الدالة ص = |س − ٣| + ٢، قم بإزاحتها إلى الأعلى بمقدار وحدتين:



تمارين ٧-١

١) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ $|٥|$ ب $|-٣|$ ج $|-٢,٥|$

د $|(-٣)^{٣}|$ هـ $\sqrt{|-٩|}$

٢) حلّ كلًا ممّا يأتي:

أ $|٤\text{س} - ٣| = ٧$ ب $|١ - ٢\text{س}| = -٥$ ج $\left|\frac{٣\text{س} - ٢}{٥}\right| = ٤$

د $\left|\frac{\text{س}}{٣} + ٢\right| = ٣$ هـ $\left|\frac{\text{س} + ٢}{٣} - \frac{٢\text{س}}{٥}\right| = ٢$ و $|٢\text{س} + ٧| = ٣\text{س}$

٣) حلّ كلًا ممّا يأتي:

أ $\left|\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}\right| = ٥$ ب $\left|\frac{٣\text{س} - ١}{\text{س} + ٥}\right| = ١$ ج $\left|٢ - \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}\right| = ٥$

د $|٣\text{س} - ٥| = \text{س} + ١$ هـ $\text{س} + |\text{س} + ٤| = ٨$ و $٨ - |١ - ٢\text{س}| = \text{س}$

٤) حلّ كلًا ممّا يأتي:

أ $|٢\text{س} + ١| = |\text{س}|$ ب $|٣ - ٢\text{س}| = |٣\text{س}|$ ج $|٢\text{س} - ٥| = |١ - \text{س}|$

د $|٣\text{س} + ٥| = |١ + ٢\text{س}|$ هـ $|\text{س} - ٥| = ٢|\text{س} + ١|$ و $٣|٢\text{س} - ١| = \left|\frac{١}{٢}\text{س} - ٣\right|$

٥) حلّ كلًا ممّا يأتي:

أ $|\text{س}^{٢} - ٢| = ٧$ ب $|٥ - \text{س}^{٢}| = ٣ - \text{س}$ ج $|\text{س}^{٢} + ٢\text{س}| = \text{س} + ٢$

د $|\text{س}^{٢} - ٣| = ٢\text{س} + ١$ هـ $|٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س}| = ٤ - \text{س}$ و $|\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ٦| = ٦ - \text{س}$

٦) حلّ المعادلة $|٢\text{س} + ١| + |٢\text{س} - ١| = ٣$

٧) ارسم التمثيلات البيانية لكل من الدوالّ الآتية، مبينًا إحداثيات نقاط تقاطعها مع المحورَين، ثم أعِد تعريف كل دالّة من خلال الرسم.

أ $\text{ص} = |\text{س} + ٢|$ ب $\text{ص} = |٣ - \text{س}|$ ج $\text{ص} = \left|٥ - \frac{١}{٢}\text{س}\right|$

٨) إذا علمت أن ص = |س − ٣| + ٢

أ أكمل الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٥		٣				

ب ارسم بيان الدالة ص = |س − ٣| + ٢ ، ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٦

٩) ارسم بيان كلّ من الدوالّ الآتية. ثم حدد إحداثيات نقطة الرأس لكل منها:

أ ص = |س + ١| + ٢
ب ص = |س − ٥| − ٢
ج ص = ٢ − |س|
د ص = |٢س| − ٣
هـ ص = ١ − |س + ٢|
و ص = ٥ − ٢ |س|

١٠) إذا علمت أن د(س) = |٥ − ٢س| + ٣ ، ٢ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٨، فأوجد مدى الدالّة د.

١١) أ ارسم بيان الدالة ص = ٢|س − ٢| + ١ ، −٢ $<$ س $<$ ٦، مبينًا إحداثيات نقطة الرأس والمقطع الصادي.

ب ارسم على المخطط نفسه ص = س + ٢

ج استخدم التمثيل البياني لحل المعادلة ٢|س − ٢| + ١ = س + ٢

١٢) أ ارسم الدالّة ص = |س − ٢| ، −٣ $<$ س $<$ ٦، مبينًا إحداثيات نقطة الرأس والمقطع الصادي.

ب ارسم على المخطط نفسه ص = |١ − ٢س|

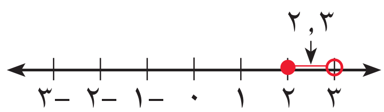
ج استخدم التمثيل البياني لحل المعادلة |س − ٢| = |١ − ٢س|

٧-٢ دالة الصحيح

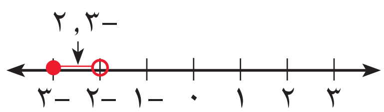
يُعرّف صحيح العدد **س** على أنه أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي س، ويرمز له بالرمز [**س**].

فمثلًا:

[٢,٣] = ٢،   ٢ ≤ ٢,٣ < ٣



[-٢,٣] = -٣،   -٣ ≤ -٢,٣ < -٢



مثــال ٦

أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ [٥]   ب [٢,٤]   ج [٤,٩٩]   د [٠,٦١٨]

هـ [-١,٣]   و [-٩,٣]   ز [-٤]

الحــلّ:

أ [٥] = ٥

ب [٢,٤] = ٤

ج [٤,٩٩] = ٤

د [٠,٦١٨] = ٠

هـ [-١,٣] = -٤

و [-٩,٣] = -٤

ز [-٤] = -٤

التمثيل البياني لدالة الصحيح

لرسم بيان الدالة د(س) = [س]   ،   −٥ ⩽ س < ٦:

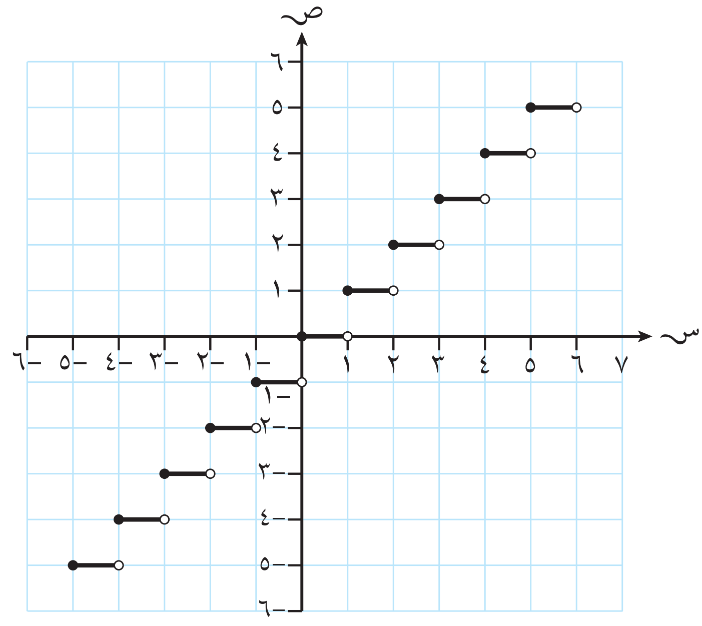
فمثلًا: عند التعويض بأي قيمة لـ س في ٤ ⩽ س < ٥ نجد أن:

[٤] = [٤,١] = [٤,٥] = [٤,٩] = [٤,٩٩] = [٤,٩٩٩٩٩٩٩] = ٤

∴ [س] = ٤ حيث ٤ ⩽ س < ٥

يمكننا تمثيل ذلك في المستوى الإحداثي على شكل خط عليه دائرة صغيرة ممتلئة عند نقطة انتهاء اليسار، ودائرة صغيرة فارغة عند نقطة انتهاء اليمين (ما يشير إلى أن ٤ هو جزء من الفترة بينما ٥ ليست كذلك).

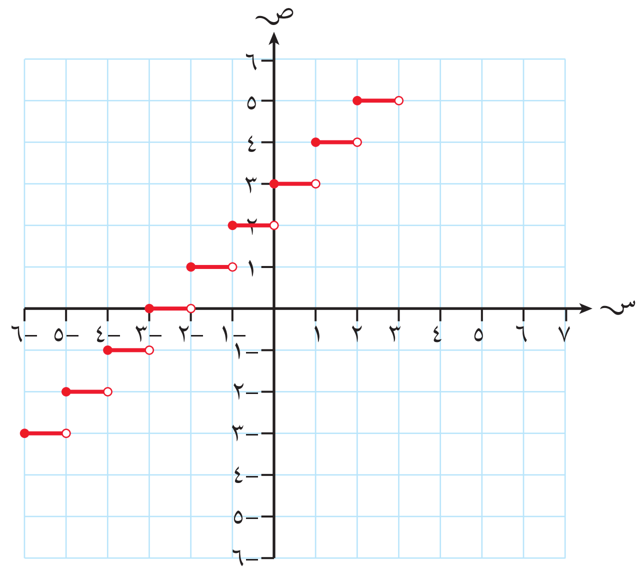
وهكذا نستكمل رسم التمثيل البياني للدالة د(س) درجيًا، وبالتالي، فإن التمثيل البياني لدالّة الصحيح هو:



مثـــال ٧

ارسم الدالّة ص = [س] + ٣، حيث −٦ ⩽ س < ٣

الحــلّ:

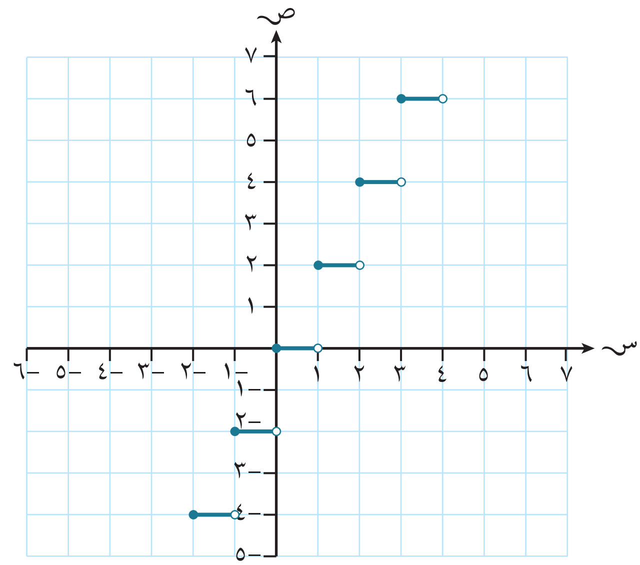


تمّ إزاحة الدالة ص = [س] إلى الأعلى بمقدار ٣

مثـــال ٨

ارسم الدالّة ص = ٢ [س]، حيث −٢ ⩽ س < ٤

الحــلّ:

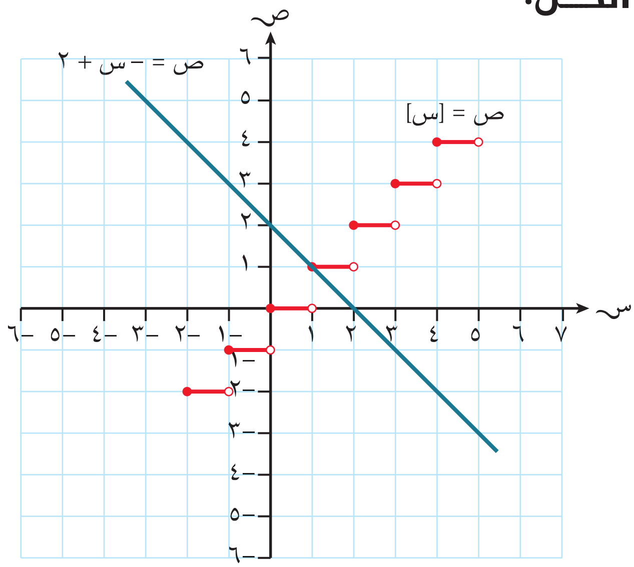


تم إجراء تمدد رأسي للدالة ص = [س] بمقدار ٢

مثــال ٩

ارسم الدالّة ص = [س] والدالّة ص = − س + ٢ في المستوى الإحداثي نفسه،
واستخدمهما لحل المعادلة [س] = − س + ٢

الحــلّ:



تتقاطع الدالتان عند س = ١

تحقق من الإجابة من خلال تعويض س = ١ في [س] = − س + ٢

[١] = −١ + ٢

١ = ١، وهي عبارة صحيحة.

تمارين ٧-٢

١) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ [١٧,٨٨]   ب $\left[\frac{٨٠}{٣}\right]$ ج $\left[-\frac{٢٢}{٧}\right]$ د $\left[\frac{٢٢}{٧}\right]$ هـ [−٦]

٢) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\left[٨ + \frac{١٠}{٩}\right]$ ب $[٨] + \left[\frac{١٠}{٩}\right]$ ج $\left[\frac{١١}{٣} + \frac{٧}{٢}\right]$

د $\left[\frac{١١}{٣}\right] + \left[\frac{٧}{٢}\right]$ هـ $\left[٤ \times \frac{٣}{٢}\right]$ و $[٤] \times \left[\frac{٣}{٢}\right]$

ز $\left|\left[-١٢ \times \frac{٣}{٥}\right]\right|$ ح $\left|\left[-١٢ \times \frac{٣}{٥}\right]\right|$

٣) ارسم بيان كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = [س] − ٤، حيث −١ ⩽ س < ٦

ب د(س) = ٣[س]، حيث −١ ⩽ س < ٣

٤) ارسم بيان الدالتَين ص = [س]، ص = ٤س + ١ في المستوى الإحداثي نفسه، واستخدمهما لحل المعادلة [س] = ٤س + ١

٥) ارسم بيان الدالتَين ص = [س] + ١، ص = ٢ − $\frac{١}{٢}$س في المستوى الإحداثي نفسه، واستخدمهما لتفسير عدم وجود حلول للمعادلة [س] + ١ = ٢ − $\frac{١}{٢}$س.

٣-٧ الدالة اللوغاريتمية

تعلمت سابقًا حل المعادلات الأسية مثل: $٢^{س} = ٨$ حيث س = ٣، ولكن قد تواجهنا معادلات أسية لا يمكن حلها بالطريقة السابقة مثل: $٢^{س} = ٧$

لذا ظهرت هنا الحاجة إلى استخدام طريقة أخرى لإيجاد قيمة س في مثل هذا النوع من المعادلات الأسية تعرف باللوغاريتمات.

مفهوم اللوغاريتم

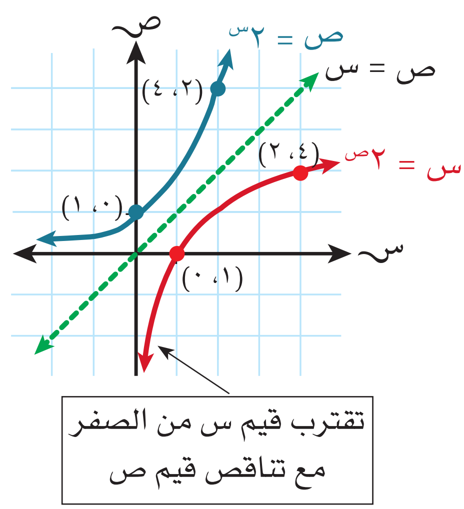
من خلال دراسة الأسس وجدنا مثلًا أن $٢^{٤} = ١٦$، وإذا أردنا أن نعرف القوة للأساس ٢ للحصول على ١٦، فإننا نستخدم مفهومًا آخر هو اللوغاريتم، أي أن:

اللوغاريتم هو: الأس لأساس معيّن، ويرمز إليه بالرمز (لـو) ويقرأ لوغاريتم.

استكشف ٣

تأمّل التمثيل البياني أدناه، ماذا تلاحظ؟

ما العلاقة بين الدالتين ص = $٢^{س}$، س = $٢^{ص}$؟



نتيجة ١

معكوس الدالة الأسية د (س) = $أ^{س}$ هو س = $أ^{ص}$، يمكن كتابته باستخدام تعريف اللوغارتيم كالتالي:

$د^{-١}(س) = لـو_{أ}\, س$ وتقرأ لوغاريتم س للأساس أ حيث س > ٠، أ > ٠، أ ≠ ١

مجال الدالة اللوغاريتمية هو س > ٠ (مدى الدالة الأسية)

مدى الدالة اللوغاريتمية هو ع (مجال الدالة الأسية)

هل تعلم؟

يرجع الفضل لاكتشاف علم اللوغاريتمات إلى العالم المسلم أبي عبداللّه محمد بن موسى الخوارزمي (٧٨١م – ٨٤٧م)، وهو علم يختص بحل المسائل المعقدة المختلفة، وما زال يُستخدم حتى الآن.

٧-١٣أ اللوغاريتم للأساس أ

يوضح المخطط أدناه العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية:

الصورة الأسية: ص = $أ^{\color{red}س}$

الصورة اللوغاريتمية: $\color{red}س$ = $\text{لـو}_{أ}$ ص

الأُس أو اللوغاريتم

الأساس

العدد

نتيجة ٢

- إذا كان ص = $أ^{س}$، فإن س = $\text{لـو}_{أ}$ ص
- لكل س ∈ ع، أ > ٠، أ ≠ ١ يكون:

١) $\text{لـو}_{أ}$ أ = ١ ٢) $\text{لـو}_{أ}$ ١ = ٠

٣) $\text{لـو}_{أ}$ $أ^{س}$ = س ٤) $أ^{\text{لـو}_{أ} س}$ = س

مُساعَدة

توضح نتيجة ٢ خواص اللوغاريتم للأساس أ.

ليكن $\text{لـو}_{أ}$ ص معرّفًا، يجب توافر الشرطَين الآتيَين:

- أ > ٠ و أ ≠ ١
- ص > ٠

مثـــال ١٠

حوّل $٥^{٣}$ = ١٢٥ إلى الصورة اللوغاريتمية.

الحـــلّ:

الطريقة ١:

$٥^{٣}$ = ١٢٥

الخطوة ١: حدد الأساس والأسّ ⟵ الأساس = ٥، الأسّ = ٣

الخطوة ٢: اكتب المعادلة بالصورة اللوغاريتمية ⟵ ٣ = $\text{لـو}_{٥}$ ١٢٥

$٥^{٣}$ = ١٢٥ ⟺ ٣ = $\text{لـو}_{٥}$ ١٢٥

الطريقة ٢:

$٥^{٣}$ = ١٢٥ .... نستخدم الخاصية رقم ٣ من نتيجة ٢

$\text{لـو}_{٥}$ $٥^{٣}$ = $\text{لـو}_{٥}$ ١٢٥ .... خذ اللوغاريتم للأساس ٥ لطرفَي المعادلة

٣ = $\text{لـو}_{٥}$ ١٢٥ .... استخدم $\text{لـو}_{٥}$ $٥^{س}$ = س

مثــال ١١

أ حوّل $لـو_{٣}$ س = ٢,٥ إلى الصورة الأسّية.

ب أوجِد الدالة العكسية للدالة ص = $لـو_{٣}$ س

الحــلّ:

أ **الطريقة ١**

$لـو_{٣}$ س = ٢,٥

الخطوة ١: حدد الأساس والأسّ ← الأساس = ٣، الأسّ = ٢,٥

الخطوة ٢: اكتب المعادلة بالصورة الأسّية ← $٣^{٢,٥}$ = س

$لـو_{٣}$ س = ٢,٥ $\Leftrightarrow$ $٣^{٢,٥}$ = س

الطريقة ٢

$لـو_{٣}$ س = ٢,٥ ...... نستخدم الخاصية رقم ٣ لإيجاد قيمة س

$٣^{لـو_{٣} س}$ = $٣^{٢,٥}$ ...... اكتب كل طرف في صورة قوى للعدد ٣

س = $٣^{٢,٥}$ ...... استخدم $٣^{لـو_{٣} س}$ = س

ب ص = $لـو_{٣}$ س

س = $٣^{ص}$

الدالة العكسية هي ص = $٣^{س}$

مثــال ١٢

أوجِد قيمة:

أ $لـو_{٢}$ ١٦ ب $لـو_{٣} \frac{١}{٩}$

الحــلّ:

أ $لـو_{٢}$ ١٦ = $لـو_{٢} ٢^{٤}$ ...... اكتب ١٦ بصورة قوى ٢، ١٦ = $٢^{٤}$

= ٤

ب $لـو_{٣} \left(\frac{١}{٩}\right)$ = $لـو_{٣} ٣^{-٢}$ ...... اكتب $\frac{١}{٩}$ بصورة قوى ٣ ، $\frac{١}{٩}$ = $٣^{-٢}$

= −٢

مثال ١٣

بسّط $لـو_{س}\left(\frac{\sqrt[٣]{س}}{س}\right)$

الحلّ:

$لـو_{س}\left(\frac{\sqrt[٣]{س}}{س}\right) = لـو_{س}(س^{-\frac{٢}{٣}})$ .... اكتب $\frac{\sqrt[٣]{س}}{س}$ بصورة قوى س

$= -\frac{٢}{٣}$

تمارين ٧-١٣

١) حوّل كلًا ممّا يأتي من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $٥^{٢} = ٢٥$ ب $٢^{٤} = ١٦$ ج $٣^{-٥} = \frac{١}{٢٤٣}$ د $٢^{-١٠} = \frac{١}{١٠٢٤}$

هـ $٨^{س} = ١٥$ و $س^{ص} = ٦$ ز $أ^{ب} = جـ$ ح $س^{٥ص} = ٧$

٢) حوّل كلًا ممّا يأتي من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية:

أ $لـو_{٢} ٨ = ٣$ ب $لـو_{٣} ٨١ = ٤$ ج $لـو_{٨} ١ = ٠$ د $لـو_{١٦} ٤ = \frac{١}{٢}$

هـ $لـو_{٨} ٢ = \frac{١}{٣}$ و $لـو_{٢} ص = ٤$ ز $لـو_{أ} ١ = ٠$ ح $لـو_{س} ٥ = ص$

٣) حل كلًا من المعادلات الآتية:

أ $لـو_{٢} س = ٣$ ب $لـو_{٣} س = ٢$ ج $لـو_{٤} س = ٠$ د $لـو_{س} ٤٩ = ٢$

هـ $لـو_{٣}(س + ٥) = ٢$ و $لـو_{٢}(٣س - ١) = ٥$ ز $لـو_{ص}(٧ - ٢س) = ٠$

٤) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $لـو_{٣} ٢٧$ ب $لـو_{٦} ٣٦$ ج $لـو_{٤} ٢$ د $لـو_{٢} ٠{,}١٢٥$

هـ $لـو_{٤}\left(\frac{١}{١٦}\right)$ و $لـو_{٥} ٥\sqrt{٥}$ ز $لـو_{٣}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)$ ح $لـو_{٧}\left(\frac{\sqrt[٣]{٧}}{٧}\right)^{٢}$

٥) ضع كلًا مما يأتي في أبسط صورة:

أ $لـو_{س} س^{٣}$ ب $لـو_{س} \sqrt[٣]{س}$ ج $لـو_{س}(س^{٢}\sqrt{س})$ د $لـو_{س} \frac{١}{س^{٤}}$

هـ $لـو_{س}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{٢}$ و $لـو_{س}(\sqrt{س^{٥}})$ ز $لـو_{س}\left(\frac{س}{\sqrt[٣]{س}}\right)$ ح $لـو_{س}\left(\frac{س^{٢}}{\sqrt{س}}\right)^{٢}$

٦) إذا علمت أن الدالة د معرّفة كما يأتي د: س ← ١ + $لـو_{٢}(س - ٣)$ حيث س ∈ ع، س > ٣، فأوجد $د^{-١}(س)$.

٧) ★ حل كلًا من المعادلات الآتية:

أ $لـو_{٢}(لـو_{٢} س) = -١$ ب $لـو_{٤} ٢^{(٥س - ٣)} = س^{٢}$

٨) ★ رتّب اللوغاريتمات الآتية تصاعديًا دون استخدام الحاسبة:

$لـو_{٣} ٩$ $لـو_{٣} ٨$ $لـو_{٣} ٢٠$ $لـو_{٤} ٤$ $لـو_{٣} ٢$ $لـو_{٤} ٣$ $لـو_{٢} ٣$

٧-٣ب قوانين اللوغاريتمات

استكشف ٤

أوجِد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

١) أ $\text{لـو}_{٣}(٣ \times ٣)$ ب $\text{لـو}_{٣}٣ + \text{لـو}_{٣}٣$

ماذا تلاحظ؟

٢) أ $\text{لـو}_{٥}\frac{٢٥}{٥}$ ب $\text{لـو}_{٥}٢٥ - \text{لـو}_{٥}٥$

ماذا تلاحظ؟

٣) أ $\text{لـو}_{٢}٤^{٢}$ ب $٢\,\text{لـو}_{٢}٤$

ماذا تلاحظ؟

نتيجة ٣

إذا كانت س، ص أعدادًا موجبة، أ $>$ ٠، أ $\neq$ ١، م $\in$ ع فإنه يمكننا استخدام **قوانين اللوغاريتمات laws of logarithms** الآتية:

قانون الضرب:

$\text{لـو}_{أ}(\text{س ص}) = \text{لـو}_{أ}\text{س} + \text{لـو}_{أ}\text{ص}$

قانون القسمة:

$\text{لـو}_{أ}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لـو}_{أ}\text{س} - \text{لـو}_{أ}\text{ص}$

قانون القوة:

$\text{لـو}_{أ}\text{س}^{\text{م}} = \text{م}\,\text{لـو}_{أ}\text{س}$

قانون المساواة:

إذا كان $\text{لـو}_{أ}\text{س} = \text{لـو}_{أ}\text{ص}$، فإن س = ص

براهين قوانين اللوغاريتم

قانون الضرب

$\text{لـو}_{أ}(\text{س ص})$

$= \text{لـو}_{أ}\left(\text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{س}} \times \text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{ص}}\right)$

$= \text{لـو}_{أ}\left(\text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{س} + \text{لـو}_{أ}\text{ص}}\right)$

$= \text{لـو}_{أ}\text{س} + \text{لـو}_{أ}\text{ص}$

قانون القسمة

$\text{لـو}_{أ}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$

$= \text{لـو}_{أ}\left(\frac{\text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{س}}}{\text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{ص}}}\right)$

$= \text{لـو}_{أ}\left(\text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{س} - \text{لـو}_{أ}\text{ص}}\right)$

$= \text{لـو}_{أ}\text{س} - \text{لـو}_{أ}\text{ص}$

قانون القوة

$\text{لـو}_{أ}\text{س}^{\text{م}}$

$= \text{لـو}_{أ}\left((\text{أ}^{\text{لـو}_{أ}\text{س}})^{\text{م}}\right)$

$= \text{لـو}_{أ}\left(\text{أ}^{\text{م لـو}_{أ}\text{س}}\right)$

$= \text{م}\,\text{لـو}_{أ}\text{س}$

قانون المساواة

إذا افترضنا أن:

$\text{لـو}_{أ}\text{س} = \text{لـو}_{أ}\text{ص} = \text{ن}$

$\therefore$ س = $\text{أ}^{\text{ن}}$، ص = $\text{أ}^{\text{ن}}$

$\therefore$ س = ص

باستخدام قانون القوة، $\text{لـو}_{أ}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) = \text{لـو}_{أ}\text{س}^{-١}$

$= -\,\text{لـو}_{أ}\text{س}$

مثــال ١٤

استخدم قوانين اللوغاريتمات لتبسّط كل عبارة من العبارات الآتية:

أ $\text{لـو}_{٢}\ ٣ + \text{لـو}_{٢}\ ٥$ ب $\text{لـو}_{٣}\ ٨ - \text{لـو}_{٣}\ ٤$ ج $٢\text{لـو}_{٥}\ ٢ + \text{لـو}_{٥}\ ٣$

الحــلّ:

أ $\text{لـو}_{٢}\ ٣ + \text{لـو}_{٢}\ ٥$

$= \text{لـو}_{٢}\ (٣ \times ٥)$

$= \text{لـو}_{٢}\ ١٥$

ب $\text{لـو}_{٣}\ ٨ - \text{لـو}_{٣}\ ٤$

$= \text{لـو}_{٣}\left(\frac{٨}{٤}\right)$

$= \text{لـو}_{٣}\ ٢$

ج $٢\text{لـو}_{٥}\ ٢ + \text{لـو}_{٥}\ ٣$

$= \text{لـو}_{٥}\ ٢^{٢} + \text{لـو}_{٥}\ ٣$

$= \text{لـو}_{٥}\ (٤ \times ٣)$

$= \text{لـو}_{٥}\ ١٢$

مثــال ١٥

أ اكتب العددين ٨ ، ٠,٢٥ في صورة قوى العدد ٢

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتبسط $\frac{\text{لـو}_{٥}\ ٨}{\text{لـو}_{٥}\ ٠,٢٥}$

الحــلّ:

أ $٨ = ٢^{٣}$

$٠,٢٥ = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢^{٢}} = ٢^{-٢}$

ب $\text{لـو}_{٥}\ ٨ = \text{لو}_{٥}\ ٢^{٣} = ٣\ \text{لـو}_{٥}\ ٢$ استخدم قوانين اللوغاريتمات

$\text{لـو}_{٥}\ ٠,٢٥ = \text{لـو}_{٥}\ ٢^{-٢} = -٢\ \text{لـو}_{٥}\ ٢$

وهذا يعني أن $\frac{\text{لـو}_{٥}\ ٨}{\text{لـو}_{٥}\ ٠,٢٥} = \frac{٣\text{لـو}_{٥}\ ٢}{-٢\ \text{لـو}_{٥}\ ٢} = \frac{٣}{-٢} = -\frac{٣}{٢}$

مثــال ١٦

إذا كان $\text{لـو}_{٤}\ م = س$، $\text{لـو}_{٤}\ ن = ص$، فعبّر عن كل عبارة من العبارات الآتية بدلالة س، ص:

أ $\text{لـو}_{٤}\ م^{٥} - \text{لـو}_{٤}\ ن^{٢}$ ب $\text{لـو}_{٤}\sqrt{م} + ٥\ \text{لـو}_{٤}\sqrt[٣]{ن}$ ج $\text{لـو}_{٤}\left(\frac{٦٤}{م}\right)$

الحــلّ:

أ $\text{لـو}_{٤}\ م^{٥} - \text{لـو}_{٤}\ ن^{٢}$

$= ٥\text{لـو}_{٤}\ م - ٢\text{لـو}_{٤}\ ن$

$= ٥س - ٢ص$

ب $\text{لـو}_{٤}\sqrt{م} + ٥\ \text{لـو}_{٤}\sqrt[٣]{ن}$

$= \frac{١}{٢}\text{لـو}_{٤}\ م + \frac{٥}{٣}\text{لـو}_{٤}\ ن$

$= \frac{١}{٢}س + \frac{٥}{٣}ص$

ج $\text{لـو}_{٤}\left(\frac{٦٤}{م}\right)$

$= \text{لـو}_{٤}\ ٤^{٣} - \text{لـو}_{٤}\ م$

$= ٣ - س$

تمارين ٧-٣ب

١) اكتب كلًا ممّا يأتي في أبسط صورة:

أ لـو$_{٢}$ ٧ + لـو$_{٢}$ ١١ ب لـو$_{٦}$ ٢٠ − لـو$_{٦}$ ٤ ج ٣لـو$_{٥}$ ٢ − لـو$_{٥}$ ٤

د ٢ لـو$_{٣}$ ٨ − ٥ لـو$_{٣}$ ٢ هـ ١ + ٢ لـو$_{٢}$ ٣ و ٢ − لـو$_{٤}$ ٢

ز لـو$_{٢}$ ٤٠ − لـو$_{٢}$ ٥ ح لـو$_{٦}$ ٢٠ + لـو$_{٦}$ ٥ ط لـو$_{٢}$ ٦٠ − لـو$_{٢}$ ٥

ي ٣لـو$_{٥}$ ٢ + $\frac{١}{٢}$لـو$_{٥}$ ٣٦ − لـو$_{٥}$ ١٢ ك $\frac{١}{٢}$لـو$_{٣}$ ٨ + $\frac{١}{٢}$لـو$_{٣}$ ١٨ − ١

٢) بسّط كلًا مما يأتي:

أ $\frac{\text{لـو}_{٢}\ ٢٧}{\text{لـو}_{٢}\ ٣}$ ب $\frac{\text{لـو}_{٣}\ ١٢٨}{\text{لـو}_{٣}\ ١٦}$ ج $\frac{\text{لـو}_{٣}\ ٢٥}{\text{لـو}_{٣}\ ٠,٠٤}$ د $\frac{\text{لـو}_{٥}\ ١٠٠٠}{\text{لـو}_{٥}\ ٠,٠١}$

٣) إذا علمت أن لـو$_{٨}$ ص = لـو$_{٨}$ (س − ٢) − ٢ لـو$_{٨}$ س، فأوجِد ص بدلالة س.

٤) إذا علمت أن لـو$_{٣}$ (ع − ١) − لـو$_{٣}$ ع = ١ + ٣ لـو$_{٣}$ ص، فأوجِد ع بدلالة ص.

٥) إذا علمت أن ص = لـو$_{٥}$ س، فأوجد كلًا ممّا يأتي بدلالة ص:

أ س ب لـو$_{٥}$ ٢٥س ج لـو$_{٥}$ $\frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}}{١٢٥}$ د لـو$_{\text{س}}$ ١٢٥

٦) إذا علمت أن س = لـو$_{٤}$ م، ص = لـو$_{٤}$ ق، فعبّر عن كلّ ممّا يأتي بدلالة س، ص:

أ لـو$_{٤}$ ٦٤ م ب لـو$_{٤}$ $\frac{٢}{\text{ق}}$ ج م × ق د لـو$_{٤}$ م^{٢} − لـو$_{٤}$ ٤$\sqrt{\text{ق}}$

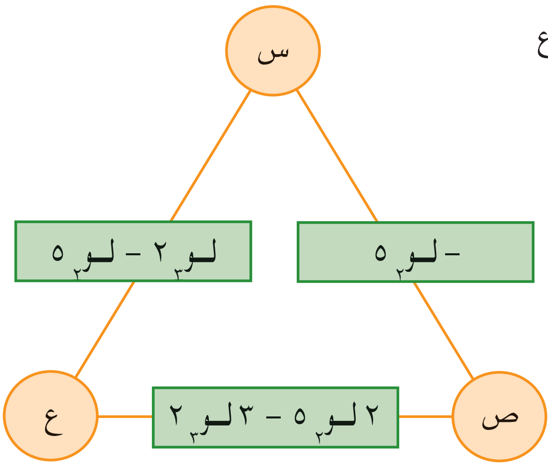
٧) إذا علمت أن لـو$_{أ}$ س = ٧، لـو$_{أ}$ ص = ٤، فأوجد قيمة الآتي:

أ لـو$_{أ}$ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ب لـو$_{أ}$ $\frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{ص}^{٢}}$ ج لـو$_{أ}$ س^{٢}$\sqrt{\text{ص}}$ د لـو$_{أ}$ $\frac{\text{ص}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$

٨) ★ العدد داخل المستطيل الموجود على ضلع المثلث هو مجموع العددَين في دائرتَي طرفَي ذلك الضلع.

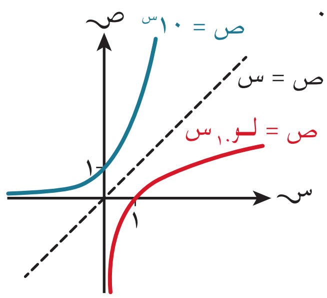
فمثلًا: س + ص = − لـو$_{٢}$ ٥

أوجِد قيمة كلٍّ من: س، ص، ع.



٧-٣ج اللوغاريتم الاعتيادي (اللوغاريتم للأساس ١٠)

درست سابقًا اللوغاريتم للأساس (أ)، وجميع الخواص والقوانين التي تنطبق على اللوغاريتم للأساس (أ) تنطبق على **اللوغاريتم الاعتيادي** (اللوغاريتم للأساس ١٠) **logarithm of base 10**.



التمثيل البياني للدالة ص = $لـو_{١٠}$ س هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة ص = $١٠^{س}$ حول المستقيم ص = س.

كل دالة من الدالتين ص = $لـو_{١٠}$ س، ص = $١٠^{س}$ دالة ١٠ هي عكسية للأخرى.

استكشف ٥

١) ناقش مع زملائك سبب اعتبار كل عبارة من العبارتَين صحيحة.

$لـو_{١٠}$ $١٠^{س}$ = س حيث س ∈ ع

$١٠^{لـو_{١٠} س}$ = س حيث س > ٠

٢) أ ناقش مع زملائك سبب اعتبار كل عبارة من العبارتَين صحيحة.

$لـو_{١٠}$ ١٠ = ١

$لـو_{١٠}$ ١ = ٠

ب دون استخدام الحاسبة، املأ الجدول الآتي، وبرر إجابتك.

$لـو_{١٠}$ ٠,٠١	$لـو_{١٠}$ ٠,١	$لـو_{١٠}$ ١	$لـو_{١٠}$ ١٠	$لـو_{١٠}$ ١٠٠	$لـو_{١٠}$ ١٠٠٠
.....	.....	٠	١	.....	.....

مُساعَدة

يمكن استخدام المفتاح 'log' أو 'lg' لإيجاد اللوغاريتم الاعتيادي.

مثال ١٧

أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ لـو ١٠٠٠٠ ب لـو ٠,٠٠٠١ ج لـو $١٠٠٠\sqrt{١٠}$

الحـلّ:

أ لـو ١٠٠٠٠ = لـو $١٠^{٤}$ .... اكتب ١٠٠٠٠ بصورة قوى ١٠، ١٠٠٠٠ = $١٠^{٤}$

= ٤

ب لـو ٠,٠٠٠١ = لـو $١٠^{-٤}$ .... اكتب ٠,٠٠٠١ بصورة قوى ١٠، ٠,٠٠٠١ = $١٠^{-٤}$

= −٤

ج لـو $١٠٠٠\sqrt{١٠}$ = لـو $١٠^{٣,٥}$ .... اكتب $١٠٠٠\sqrt{١٠}$ بصورة قوى ١٠

= ٣,٥ .... $١٠٠٠\sqrt{١٠}$ = $١٠^{٣}$ × $١٠^{٠,٥}$ = $١٠^{٣,٥}$

مُساعَدة

ليس من الضروري كتابة الأساس عندما تكون قيمته تساوي ١٠ أي أن:

$لـو_{١٠}$ س = لـو س

مثــال ١٨

أ حوّل $١٠^{س} = ٥٨$ إلى الصورة اللوغاريتمية، وأوجد قيمة س مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

ب حوّل $لـو_{١٠} س = ٣{,}٥$ إلى الصورة الأسية، وأوجد قيمة س مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

أ **الطريقة ١**

$١٠^{س} = ٥٨$

الخطوة ١: حدد الأساس والأسّ ⟵ الأساس = ١٠، الأسّ = س

الخطوة ٢: اكتب المعادلة بالصورة اللوغاريتمية ⟵ $س = لـو_{١٠} ٥٨$

$١٠^{س} = ٥٨ \Leftrightarrow س = لـو_{١٠} ٥٨$

$س = ١{,}٧٦$ .... باستخدام الحاسبة.

الطريقة ٢

$١٠^{س} = ٥٨$

$لـو_{١٠} ١٠^{س} = لـو_{١٠} ٥٨$ .... خذ اللوغاريتم للأساس ١٠ للطرفَين.

$س = لـو_{١٠} ٥٨$ .... استخدم $لـو_{١٠} ١٠^{س} = س$ (كما في استكشف ٥)

ب **الطريقة ١**

$لـو_{١٠} س = ٣{,}٥$

$لـو_{١٠} س = ٣{,}٥ \Leftrightarrow س = ١٠^{٣{,}٥}$

الطريقة ٢

$لـو_{١٠} س = ٣{,}٥$ .... اكتب كل طرف بصورة قوى ١٠

$١٠^{لـو_{١٠} س} = ١٠^{٣{,}٥}$ .... استخدم $١٠^{لـو_{١٠} س} = س$

$س = ١٠^{٣{,}٥} = ٣١٦٠$

تمارين ٧-٣ج

١) أوجِد قيمة كلٍّ مما يأتي دون استخدام الحاسبة:

أ $\text{لـو}_{١٠}\ ١٠٠$ ب $\text{لـو}_{١٠}\ ٠{,}٠٠٠١$ ج $\text{لـو}_{١٠}\ (١٠\sqrt{١٠})$

٢) أوجِد قيمة كلٍّ مما يأتي دون استخدام الحاسبة:

أ $\text{لـو}_{١٠}\ (\sqrt[٣]{١٠})$ ب $\text{لـو}_{١٠}\ (١٠٠\sqrt[٣]{١٠})$ ج $\text{لـو}_{١٠}\ \left(\frac{١٠٠}{\sqrt{١٠٠٠}}\right)$

٣) حوّل كلًا مما يأتي من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ $١٠^{٢} = ١٠٠$ ب $١٠^{س} = ٢٠٠$ ج $١٠^{س} = ٠{,}٠٥$

٤) حوّل كلًا مما يأتي من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية:

أ $\text{لـو}\ ١٠٠٠٠ = ٤$ ب $\text{لـو}\ س = ١{,}٢$ ج $\text{لـو}\ س = -٠{,}٦$

٥) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، واكتب الناتج مقرّبًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $١٠^{س} = ٥٢$ ب $١٠^{س} = ٢٥٠$ ج $١٠^{س} = ٠{,}٤٨$

٦) حل كل معادلة من المعادلات الآتية واكتب الناتج مقرّبًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $\text{لـو}\ س = ١{,}٨٨$ ب $\text{لـو}\ س = ٢{,}٧٦$ ج $\text{لـو}\ س = -١{,}٤$

٧) أوجد $د^{-١}(س)$ للدالة $د: س \leftarrow ١٠^{س} - ٣$ حيث $س \in ع$.

٨) إذا كان م، ق عددَين موجبَين حيث $٤(\text{لـو}\ م)^{٢} + ٢(\text{لـو}\ ق)^{٢} = ٩$، فأوجِد أكبر قيمة ممكنة لـ م

٧-٣د اللوغاريتم الطبيعي (اللوغاريتم للأساس هـ)

يوجد نوع آخر من اللوغاريتمات أساسه العدد النيبيري هـ.

حيث هـ هو عدد غير نسبي يساوي تقريبًا ٢,٧١٨

تُسمّى الدالة ص = هـ^{س} **الدالة الأسية الطبيعية natural exponential function**.

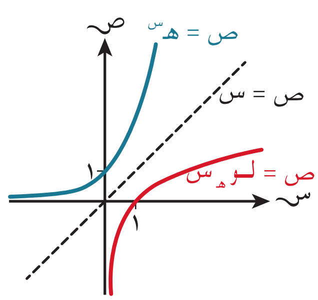
اللوغاريتم للأساس هـ يسمى **اللوغاريتم الطبيعي natural logarithms**. ويرمز إليه بالرمز لـو$_{هـ}$ أو لط.

يستخدم لـو$_{هـ}$ س أو لط س للتعبير عن اللوغاريتم الطبيعي لـ س.

نتيجة ٤

إذا كان ص = هـ^{س}، فإن س = لو$_{هـ}$ ص، ص > ٠

التمثيل البياني للدالة ص = لـو$_{هـ}$ س هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة ص = هـ^{س} حول المستقيم ص = س



كلا الدالتين ص = لـو$_{هـ}$ س، ص = هـ^{س} دالة عكسية للأخرى.

جميع خواص وقوانين اللوغاريتمات التي تعلمتها تنطبق على اللوغاريتم الطبيعي (اللوغاريتم للأساس هـ).

مثال ١٩

أ استخدم الحاسبة لتجد قيمة هـ^{٢}

ب دون استخدام الحاسبة، أوجد قيمة هـ$^{لط ٥}$

ج حل المعادلة لط هـ^{٢س} = ٩

الحـــلّ:

أ اضغط على مفتاح e^x ثم على مفتاح ٢

∴ هـ^{٢} = ٧,٣٩ (مقربة إلى ٣ أرقام معنوية).

ب باستخدام الخاصية: هـ$^{لـو_{هـ} س}$ = س

∴ هـ$^{لط ٥}$ = هـ$^{لـو_{هـ} ٥}$ = ٥

ج لط هـ^{٢س} = ٢س .... نبدأ بالطرف الأيمن باستخدام خاصية اللوغاريتمات.

∴ ٢س = ٩ ، س = ٤,٥

طريقة بديلة:

∵ لـو$_{هـ}$ هـ^{٢س} = ٩

∴ هـ^{٩} = هـ^{٢س} .... بالتحويل إلى الصورة الأسية.

∴ ٩ = ٢س ، س = ٤,٥

هل تعلم؟

يُسمّى العدد هـ بالعدد النيبيري. كما يعرف بعدد 'أويلر' Euler (١٧٠٧م – ١٧٨٣م) الذي وضع الصيغة الآتية لحساب قيمة العدد هـ:

$$هـ = ١ + \frac{١}{١} + \frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{١ \times ٢ \times ٣} + \frac{١}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} + \frac{١}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} + \dots$$

يرجع الفضل في اكتشاف اللوغاريتم إلى الرياضي الإسكتلندي 'جون نابير' John Napier (١٥٥٠م – ١٦١٧م). تضمّنت دراسته الأصلية اللوغاريتم للأساس $\frac{١}{هـ}$.

تمارين ٧-٣د

١) دون استخدام الحاسبة، أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\text{هـ}^{\text{لط } ٢}$　　ب $\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{لط } ٩}$　　ج $٥\text{هـ}^{\text{لط } ٦}$　　د $\text{هـ}^{-\text{لط } \frac{١}{٢}}$

٢) استخدم الحاسبة لتجد قيمة كل ممّا يأتي، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $\text{هـ}^{٣}$　　ب $\text{هـ}^{٢,٧}$　　ج $\text{هـ}^{٠,٨}$　　د $\text{هـ}^{-٢}$

هـ لط ٣　　و لط ١,٤　　ز لط ٠,٩　　ح لط ٠,١٥

٣) أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

أ $\text{هـ}^{\text{لط س}} = ٥$　　ب $\text{لط هـ}^{\text{س}} = ١٥$　　ج $\text{هـ}^{٣\,\text{لط س}} = ٦٤$　　د $\text{هـ}^{-\text{لط س}} = ٣$

٤) حل المعادلات الآتية مقرّبًا الناتج إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $\text{هـ}^{\text{س}} = ١٨$　　ب $\text{هـ}^{٢\text{س}} = ٢٥$　　ج $\text{هـ}^{\text{س} + ١} = ٨$　　د $\text{هـ}^{٢\text{س} - ٣} = ١٦$

هـ لط س = ٥　　و لط س = −٤　　ز لط (س − ٢) = ٦　　ح لط (٢س + ١) = −٢

٥) حل المعادلات الآتية، واكتب إجابتك بدلالة رمز اللوغاريتم الطبيعي:

أ $\text{هـ}^{\text{س}} = ١٣$　　ب $\text{هـ}^{٣\text{س}} = ٧$　　ج $\text{هـ}^{٢\text{س} - ١} = ٦$　　د $\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س} + ٣} = ٤$

٦) حل المعادلات الآتية مقرّبًا الناتج إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $\text{لط}(٣ - \text{س}^{٢}) = ٢\ \text{لط س}$　　ب ٢ لط (س + ٢) − لط س = لط (٢س − ١)

ج ٢ لط (س + ١) = لط (٢س + ٣)　　د لط (٢س + ١) = ٢ لط س + لط ٥

هـ لط(س + ٢) − لط س = ١　　و $\text{لط}\,(٢ + \text{س}^{٢}) = ١ + ٢\ \text{لط س}$

٧) عبّر عن ص بدلالة س في كل معادلة من المعادلات الآتية:

أ لط (ص + ١) − لط ص = لط (س + ص)

ب لط (ص + ٢) − لط ص = ١ + ٢ لط س

٨) أوجد $\text{د}^{-١}(\text{س})$ للدالة د: س ⟵ $٥\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢$، ∀ س ∈ ع.

٧-٤ حل المعادلات الأسّية

درست سابقًا كيف تحل معادلات أسّية تحوّل حدودها إلى الأساس نفسه.

في هذا الدرس ستتعلم كيف تحل معادلات أسّية لا نستطيع تحويل حدودها إلى الأساس نفسه.

مثال ٢٠

حل كلًا من المعادلتَين الآتيتين، واكتب الإجابة مقربة إلى ٣ أرقام معنوية.

أ $٥^{(٢س + ١)} = ٧$

ب $٣^{٢س} = ٤^{(س + ٥)}$

الحلّ:

أ $٥^{(٢س + ١)} = ٧$ .... خذ لوغاريتم للأساس ١٠ للطرفَين.

$لـو_{١٠} ٥^{(٢س + ١)} = لـو_{١٠} ٧$ .... استخدم قانون القوة.

$(٢س + ١) لـو ٥ = لـو ٧$ .... فكّ الأقواس.

$٢س لـو ٥ + لـو ٥ = لـو ٧$ .... أعد الترتيب لتجد قيمة س

$$س = \frac{لـو ٧ - لـو ٥}{٢ لـو ٥}$$

س = ٠,١٠٥ مقرّبة إلى ٣ أرقام معنوية.

مُساعَدة

عندما يكون الأساس غير مكتوب فهذا يعني أنه يساوي ١٠

ب $٣^{٢س} = ٤^{(س + ٥)}$ .... خذ لوغاريتم للأساس ١٠ للطرفَين.

$لـو ٣^{٢س} = لـو ٤^{(س + ٥)}$ .... استخدم قانون القوة.

$٢س لـو ٣ = (س + ٥) لـو ٤$ .... فكّ الأقواس.

$٢س لـو ٣ = س لـو ٤ + ٥ لـو ٤$ .... جمّع الحدود التي تحتوي على س في طرف واحد.

$س(٢ لـو ٣ - لـو ٤) = ٥ لـو ٤$ .... اقسم الطرفَين على (٢ لو ٣ − لو ٤).

$$س = \frac{٥ لـو ٤}{٢ لـو ٣ - لـو ٤}$$

س = ٨,٥٥ مقربة إلى ٣ أرقام معنوية.

مُساعَدة

يمكن حل المعادلتين في الجزئيتين (أ)، (ب) باستخدام اللوغاريتم الطبيعي ($لـو_{هـ}$ أو لط).

مثـــال ٢١

حل المعادلة $٢ \times ٣^{(٢س)} + ٧ \times ٣^{س} = ١٥$، واكتب الإجابة مقربة إلى ٣ أرقام معنوية.

الحـــلّ:

$٢ \times ٣^{(٢س)} + ٧ \times ٣^{س} - ١٥ = ٠$ .... ضع $ص = ٣^{س}$

$٢ص^{٢} + ٧ص - ١٥ = ٠$ .... حلل إلى عوامل

$(٢ص - ٣)(ص + ٥) = ٠$

$ص = ١,٥$ أو $ص = -٥$

عندما $ص = ١,٥$

$٣^{س} = ١,٥$ .... خذ اللوغاريتم للطرفين، واستخدم قانون القوة

$س \text{ لـو } ٣ = \text{لـو } ١,٥$

$س = \dfrac{\text{لـو } ١,٥}{\text{لـو } ٣} = ٠,٣٦٩$ .... قرّب العدد لأقرب ٣ أرقام معنوية

عندما $ص = -٥$

$٣^{س} = -٥$ .... لا يوجد حل لهذه المعادلة لأن $٣^{س}$ دائمًا موجبة.

وعليه يكون حل المعادلة هو $س = ٠,٣٦٩$ مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية.

مُساعَدة

$أ^{س}$ تكون دائمًا موجبة لأي قيمة لـ س إذا كان $أ > ٠$

تمارين ٧-٤

١) حل كلًا من المعادلات الآتية، واكتب الإجابة مقربة إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $٥^{س} = ١٨$

ب $٢^{س} = ٣٥$

ج $٣^{(٣س)} = ٨$

د $٢^{(س + ١)} = ٢٥$

هـ $٣^{(٢س - ٥)} = ٢٠$

و $٣^{س} = ٢^{(س + ١)}$

ز $٥^{(س + ٣)} = ٧^{(٤ - ٣س)}$

ح $٤^{(١ - ٣س)} = ٣^{(س - ٢)}$

ط $٢^{س} = ٢ \times ٥^{س}$

ي $٤^{س} = ٧ \times ٣^{س}$

ك $٢^{س + ١} = ٣ \times ٥^{س}$

ل $٥ \times ٢^{(س - ٣)} = ٤ \times ٣^{(س + ٤)}$

٢) أ بيّن أن $٢^{(\text{س}+١)} + ٦ \times ٢^{(\text{س}-١)} = ١٢$ يمكن كتابتها في صورة $٢ \times ٢^{\text{س}} + ٣ \times ٢^{\text{س}} = ١٢$

ب حل المعادلة $٢^{(\text{س}+١)} + ٦ \times ٢^{(\text{س}+١)} = ١٢$، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية.

٣) حل كلًا من المعادلات الآتية، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $٢^{(\text{س}+٢)} + ٢^{\text{س}} = ٢^{٢}$

ب $٣^{(\text{س}+١)} = ٣^{(\text{س}-١)} + ٣^{٢}$

ج $٢^{(\text{س}+١)} + ٥ \times ٢^{(\text{س}-١)} = ٢^{٤}$

د $٥^{\text{س}} + ٥^{٣} = ٥^{(\text{س}+٢)}$

هـ $٤^{(\text{س}-١)} = ٤^{\text{س}} - ٤^{٣}$

و $٣^{\text{س}+١} - ٢ \times ٣^{(\text{س}-٢)} = ٥$

٤) حل كلًا من المعادلات الآتية، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $٥^{(٢\text{س})} - ٥ \times ٥^{\text{س}} + ٦ = ٠$

ب $٢^{(٢\text{س})} + ٥ = ٦ \times ٢^{\text{س}}$

ج $٣^{٢\text{س}} = ٦ \times ٣^{\text{س}} + ٧$

د $٤^{(٢\text{س})} + ٢٧ = ١٢ \times ٤^{\text{س}}$

٥) حل كلًا من المعادلات الآتية، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $٢^{(٢\text{س})} - ٢^{(\text{س}+١)} - ٣٥ = ٠$

ب $٣^{(٢\text{س})} - ٣^{(\text{س}-١)} = ١٠$

ج $٢ \times ٥^{(\text{س}+١)} - ٥^{(٢\text{س})} = ١٦$

د $٤^{(٢\text{س}+١)} = ١٧ \times ٤^{\text{س}} - ١٥$

٦) حل كلًا من المعادلات الآتية، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية:

أ $٤^{\text{س}} + ٢^{\text{س}} - ١٢ = ٠$

ب $٣ \times ١٦^{\text{س}} - ١٠ \times ٤^{\text{س}} + ٣ = ٠$

ج $٤^{\text{س}} + ١٥ = ٤ \times ٢^{(\text{س}+١)}$

د $٢ \times ٩^{\text{س}} = ٣^{(\text{س}+١)} + ٢٧$

٧) أوجِد قيمة $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ مقربة إلى ٣ أرقام معنوية في كل مما يأتي:

أ $٣^{\text{س}} = ٧^{\text{ص}}$

ب $٧^{\text{س}} = (٢,٧)^{\text{ص}}$

ج $٤^{(٢\text{س})} = ٣^{٥\text{ص}}$

★ **٨)** إذا علمت أن $٢^{(٤\text{س}+١)} \times ٣^{(٢-\text{س})} = ٨^{\text{س}} \times ٣^{(٥-٢\text{س})}$، فأوجِد قيمة:

أ $٦^{\text{س}}$

ب س

٧-٥ حل المعادلات اللوغاريتمية

تعلمت سابقًا كيف تحل معادلات لوغاريتمية بسيطة، وستتعلم في هذا الدرس كيف تحل المزيد من المعادلات اللوغاريتمية.

حيث إن $لو_{أ}$ س يتحقق فقط عندما يكون س > ٠، أ > ٠، أ ≠ ١، عند حل معادلات لوغاريتمية **يجب التحقق من صحة الحل من خلال التعويض بجميع الجذور** في المعادلة الأصلية. كما هو مبيّن في المثال ٢٣

مثـــال ٢٢

حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

أ ٢ $لو_{٨}$ (س + ٢) = $لو_{٨}$ (٢س + ١٩)

ب ٤ $لو_{س}$ ٢ − $لو_{س}$ ٤ = ٢

الحـــلّ:

أ ٢ $لو_{٨}$ (س + ٢) = $لو_{٨}$ (٢س + ١٩) .... استخدم قانون القوة

$لو_{٨}$ (س + ٢)^{٢} = $لو_{٨}$ (٢س + ١٩) .... استخدم قانون المساواة

(س + ٢)^{٢} = ٢س + ١٩ .... فكّ الأقواس

س^{٢} + ٤س + ٤ = ٢س + ١٩

س^{٢} + ٢س − ١٥ = ٠

(س − ٣) (س + ٥) = ٠

إما س = ٣ ، أو س = −٥ .... تحقق من أن قيم س تحقق المعادلة

عندما س = ٣:

٢ $لو_{٨}$ (س + ٢) = ٢ $لو_{٨}$ ٥ = $لو_{٨}$ ٢٥ وهي قيمة معرّفة. .... عند التعويض عن س = ٣ في الطرف الأيمن

$لو_{٨}$ (٢س + ١٩) = $لو_{٨}$ (٢٥) وهي قيمة معرّفة. .... عند التعويض عن س = ٣ في الطرف الأيسر

لذا س = ٣ هو حل للمعادلة، حيث إن كلا الطرفَين معرّفان ومتساويان.

عندما س= −٥:

٢ $لو_{٨}$ (س + ٢) = ٢ $لو_{٨}$ (−٣) وهي قيمة غير معرّفة. .... عند التعويض عن س = −٥ في الطرف الأيمن

لذا لا تكون س = −٥ حلًا للمعادلة الأصلية.

وعليه، فإن الحل هو: س = ٣

ب ٤ لـو$_{س}$ ٢ − لـو$_{س}$ ٤ = ٢ .... استخدم قانون القوة

لـو$_{س}$ ٢^{٤} − لـو$_{س}$ ٢^{٢} = ٢ .... استخدم قانون القسمة

لـو$_{س}$ $\frac{٢^{٤}}{٢^{٢}}$ = ٢

لـو$_{س}$ ٢$^{٤ - ٢}$ = ٢

لـو$_{س}$ ٢^{٢} = ٢

لـو$_{س}$ ٤ = ٢ .... حوّل إلى الصورة الأسية

س^{٢} = ٤

س = ±٢ .... تحقق من أن قيم س تحقق المعادلة

وحيث اللوغاريتم يتحقق فقط عندما يكون الأساس موجبًا، فلا يكون س = −٢ حلًا.

عندما س = ٢:

٤ لـو$_{٢}$ ٢ − لـو$_{٢}$ ٤ = ٤ − ٢ لـو$_{٢}$ ٢

= ٤ − ٢

= ٢

وعليه، فإن س = ٢ يحقق المعادلة الأصلية.

∴ س = ٢ هو حل للمعادلة.

تمارين ٧-٥

١) حل المعادلات الآتية:

أ لـو$_{٥}$ س + لـو$_{٥}$ ٣ = لـو$_{٥}$ ٣٠

ب لـو$_{٢}$ ٤س − لـو$_{٢}$ ٢ = لـو$_{٢}$ ٧

ج لـو$_{٢}$ (٢ − س) + لـو$_{٢}$ ٩ = ٢ لو$_{٢}$ ٨

د لـو$_{١٠}$ (س − ٤) = ٢ لـو$_{١٠}$ ٥ + لـو$_{١٠}$ ٢

٢) حل المعادلات الآتية:

أ لـو$_{١٠}$ (٢س + ٩) − لـو$_{١٠}$ ٥ = ١

ب لـو$_{٢}$ ٢س − لـو$_{٢}$ (س − ١) = ٢

ج لـو$_{٢}$ (٥ − ٢س) = ٣ + لـو$_{٢}$ (س + ١)

د لـو$_{٥}$ (٢س − ٣) + ٢ لـو$_{٥}$ ٢ = ١ + لـو$_{٥}$ (٣ − ٢س)

٣) حل المعادلات الآتية:

أ لـو$_{٢}$ س + لـو$_{٢}$ (س −١) = لـو$_{٢}$ ٢٠

ب لـو$_{٥}$ (س − ٢) + لـو$_{٥}$ (س − ٥) = لـو$_{٥}$ ٤س

ج ٢لـو$_{٢}$ س − لـو$_{٢}$ (س − ٢) = ٢

د ٣ + ٢لـو$_{٢}$ س = لـو$_{٢}$ (٣ − ١٠س)

٤) حل المعادلات الآتية:

أ $لو_{س}\ ٤٠ - لو_{س}\ ٥ = ١$

ب $لو_{س}\ ٣٦ + لو_{س}\ ٤ = ٢$

ج $لو_{س}\ ٢٥ - ٢لو_{س}\ ٣ = ٢$

د $٢لو_{س}\ ٣٢ = ٣ + ٢لو_{س}\ ٤$

٥) حل المعادلات الآتية:

أ $(لو_{٢}\ س)^{٢} - ٨\ لو_{٢}\ س + ١٥ = ٠$

ب $(لو_{١٠}\ س)^{٢} - لو_{١٠}\ س^{٢} = ٣$

ج $(لو_{٥}\ س)^{٢} + لو_{٥}\ س^{٣} = ١٠$

د $٤(لو_{٢}\ س)^{٢} - ٢لو_{٢}\ س^{٢} = ٣$

★ **٦)** حل كل معادلة من المعادلات الآتية آنيًا:

أ $س\ ص = ٨١$

$لو_{س}\ ص = ٣$

ب $٤^{س} = ٢^{ص}$

$٣لو_{١٠}\ ص = لو_{١٠}\ س + لو_{١٠}\ ٢$

★ **٧)** حل كل معادلة من المعادلات الآتية آنيًا:

أ $لو_{٤}(س - ص) = ٢لو_{٤}\ س$

$لو_{٤}(س + ص + ٩) = ٠$

ب $لو_{١٠}\ س = ٢لو_{١٠}\ ص$

$لو_{١٠}(٢س - ١٧ص) = ٢$

★ **٨)** إذا علمت أن $لو_{١٠}\ (س^{٢}\ ص) = ٤$، $لو_{١٠}\left(\frac{س^{٤}}{ص^{٣}}\right) = ١٨$، فأوجِد قيمة $لو_{١٠}\ س$، $لو_{١٠}\ ص$.

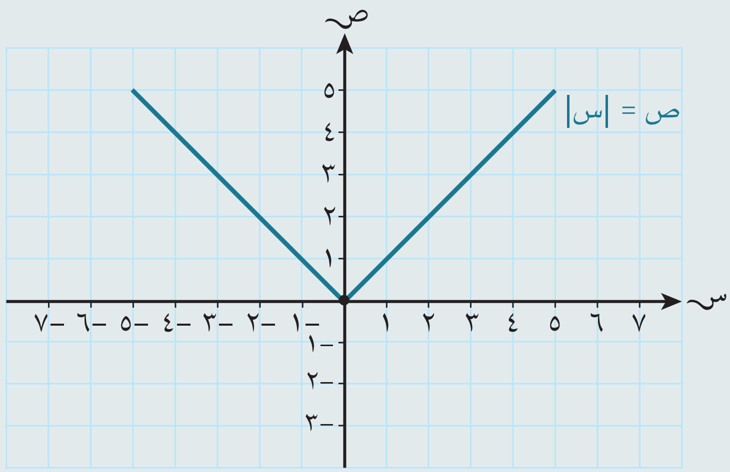
قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

دالّة المطلق:

- تُعَرّف دالّة المطلق كالآتي:

$$|س| = \begin{cases} س ، & س \geqslant ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$$

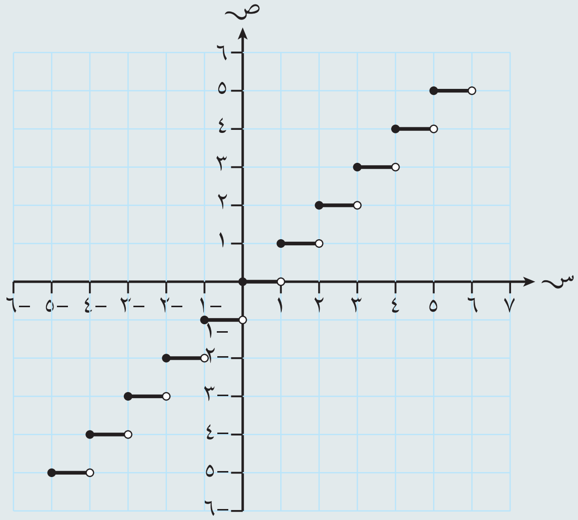
التمثيل البياني لدالة المطلق:



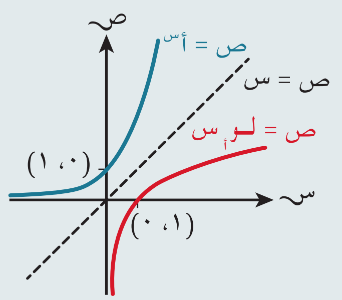
دالّة الصحيح

- صحيح العدد س هو: أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي س، ويرمز إليه بالرمز [س].

التمثيل البياني لدالّة الصحيح، حيث $-٥ \leqslant س < ٦$

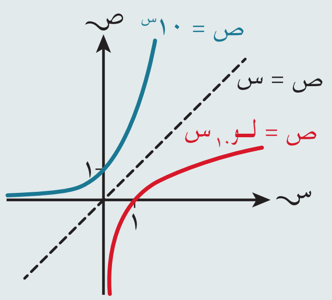


خواص و قوانين اللوغاريتمات:



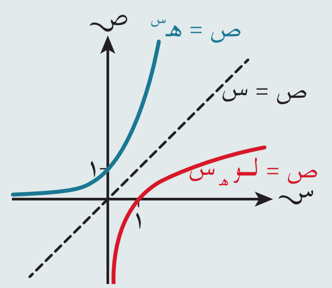
- إذا كان ص = أ$^{\text{س}}$، فإن س = لـو$_{\text{أ}}$ ص، حيث ص > ٠، س ∈ ع، أ > ٠
- لـو$_{\text{أ}}$ أ = ١، لـو$_{\text{أ}}$ ١ = ٠، لـو$_{\text{أ}}$ أ$^{\text{س}}$ = س، أ$^{\text{لـو}_{\text{أ}}\text{س}}$ = س
- إذا كانت س، ص أعدادًا موجبة، أ > ٠، أ ≠ ١، م ∈ ع:
- قانون الضرب: لـو$_{\text{أ}}$ (س ص) = لـو$_{\text{أ}}$ س + لـو$_{\text{أ}}$ ص
- قانون القسمة: لـو$_{\text{أ}}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ = لـو$_{\text{أ}}$ س − لـو$_{\text{أ}}$ ص
- قانون القوة: لـو$_{\text{أ}}$ س$^{\text{م}}$ = م لـو$_{\text{أ}}$ س
- قانون المساواة: لـو$_{\text{أ}}$ س = لـو$_{\text{أ}}$ ص فإن س = ص
- حالة خاصة لقانون القوة: لـو$_{\text{أ}}$ $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$ = − لـو$_{\text{أ}}$ س

اللوغاريتم الاعتيادي (اللوغاريتم للأساس ١٠)



- يرمز إلى اللوغاريتم للأساس ١٠ بالرمز لـو$_{١٠}$ س أو لـو س.
- إذا كان ص = ١٠$^{\text{س}}$، فإن س = لـو$_{١٠}$ ص، ص > ٠
- ص = ١٠$^{\text{س}}$، ص = لـو$_{١٠}$ س دالتان كل منهما عكسية للأخرى.

اللوغاريتم الطبيعي (اللوغاريتم للأساس هـ)



- يُسمّى اللوغاريتم للأساس هـ اللوغاريتم الطبيعي.
- هـ = ٢٫٧١٨ (لأقرب ٤ أرقام معنوية).
- يرمز إلى اللوغاريتم الطبيعي بالرمز لـو$_{\text{هـ}}$ س أو لط س.
- إذا كان ص = هـ$^{\text{س}}$، فإن س = لـو$_{\text{هـ}}$ ص، ص > ٠
- ص = هـ$^{\text{س}}$، ص = لـو$_{\text{هـ}}$ س دالتان كل منهما عكسية للأخرى.
- جميع خواص وقوانين اللوغاريتمات تنطبق على اللوغاريتم الطبيعي.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة السابعة

١) حلّ المعادلة $|٢س - ٣| = |٥س + ١|$

٢) حلّ المعادلة $|س^{٢} - ١٤| = ١١$

٣) استخدم التمثيل البياني لتحل المعادلة $[س] = ٤ - ٢س$

٤) إذا كان $لـو_{هـ} ن = ٢ لـو_{هـ} ك - لـو_{هـ} (٣ + ك)$، $ك > ٠$، فعبّر عن **ن** بدلالة **ك** دون استخدام رمز اللوغاريتم.

٥) استخدم اللوغاريتمات لتحل المعادلة:

$$٥^{(س + ٣)} = ٧^{(س - ١)}$$

واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية.

٦) حل المعادلة $٦ \times ٤^{س} - ١١ \times ٢^{س} + ٤ = ٠$، اكتب إجابتك بدلالة رمز اللوغاريتم حيث يقتضي ذلك.

٧) حل المعادلة $لط(٥س + ٤) = ٢ لط س + لط ٦$

٨) إذا علمت أن $ص = ٢^{س}$:

أ اكتب المعادلة $٢^{س} + ٣ \times ٢^{(-س)} = ٤$ في صورة $ص^{٢} - ٤ص + ٣ = ٠$

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لحل المعادلة $٢^{س} + ٣ \times ٢^{(-س)} = ٤$

واكتب قيمة س مقربة إلى ٣ أرقام معنوية.

٩) إذا كان $(١,٢)^{س} = ٦^{ص}$، فاستخدم اللوغاريتمات لتجد قيمة $\frac{س}{ص}$ مقربة إلى ٣ أرقام معنوية.

١٠) استخدم $ع = ٣^{س}$ لتحل المعادلة $٣^{س} + ٣^{٢س} = ٣^{٣س}$، واكتب الناتج مقربًا إلى ٣ أرقام معنوية.

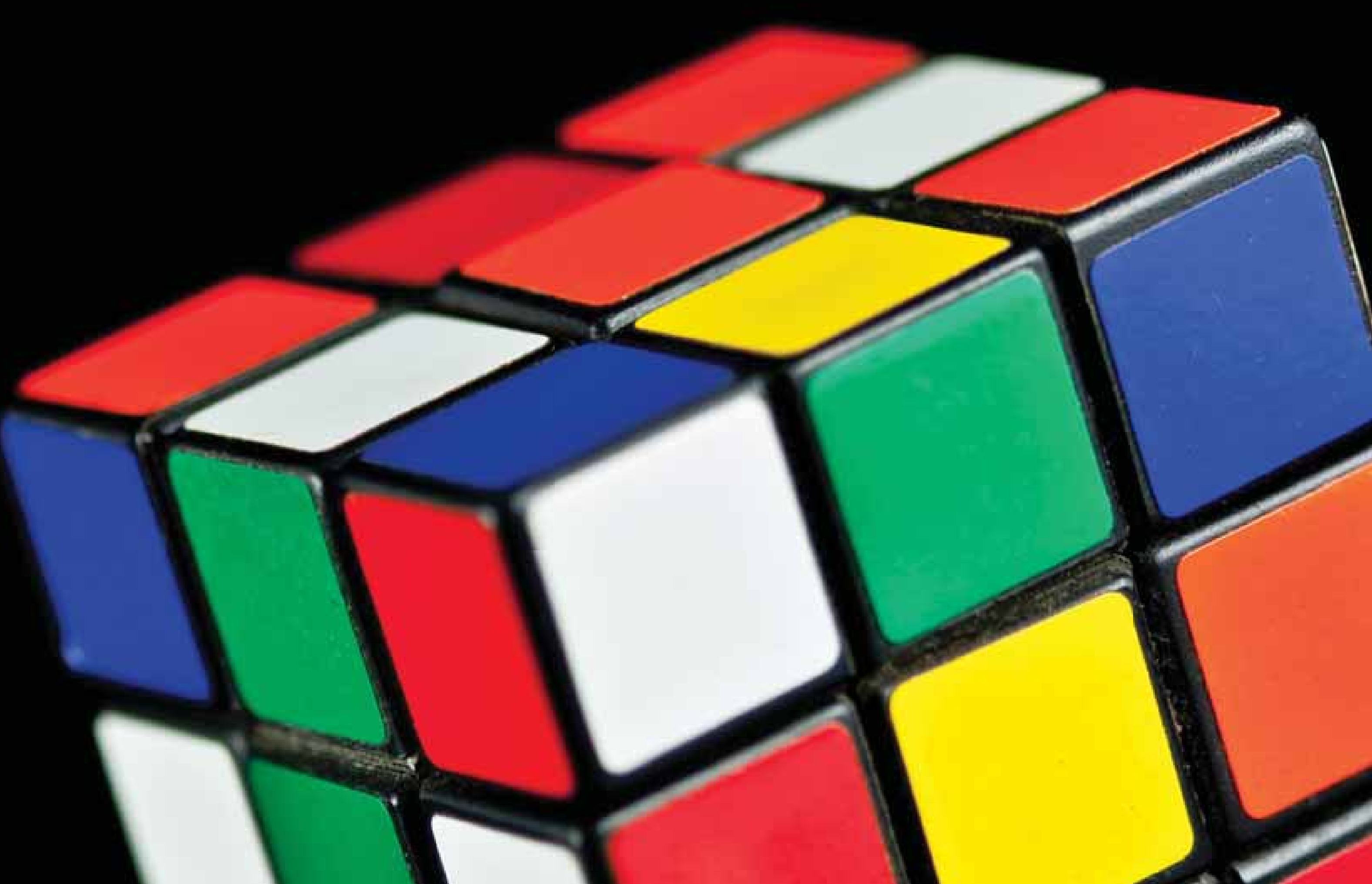
١١) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، واكتب إجابتك بدقة:

أ $هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} - ١٥ = ٠$

ب $هـ^{٢س} - ٥هـ^{س} + ٦ = ٠$

ج $٦هـ^{٢س} - ١٣هـ^{س} - ٥ = ٠$

د $هـ^{س} - ٢١هـ^{(-س)} = ٤$



الوحدة الثامنة
التباديل والتوافيق
Permutations and combinations

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٨–١ تتعرف على مضروب العدد، وصيغة مضروب العدد وتستخدمه.

٨–٢ تحسب قيمة العبارات التي تتضمن مضروب العدد باستخدام الآلة الحاسبة.

٨–٣ تبسّط عبارات عددية تتضمن مضروب العدد.

٨–٤ تحسب عدد التباديل لـ ن عنصرًا مختلفًا، وعدد تباديل ر عنصرًا من ن عنصرًا.

٨–٥ تحسب عدد التوافيق لـ ر عنصرًا من ن عنصرًا مختلفًا.

٨–٦ تستخدم مثلّث باسكال لتجد مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

٨–٧ تستخدم $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ ومضروب العدد لإيجاد معامل حد في مفكوك ذات الحدَّين.

٨–٨ تستخدم مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$، حيث ن عدد صحيح موجب، لإيجاد حد معيّن في مفكوك $(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}}$ حيث تكون فيه قوى س محددة.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة السادسة الوحدة الحادية عشرة	تفكّ الأقواس.	١) فكّ الأقواس: أ (٢س + ٣)^{٢} ب (١ − ٣س)(١ + ٢س − ٣س^{٢})

المفردات

التباديل permutations

التوافيق combinations

مضروب العدد factorial of a number

مثلث باسكال Pascal’s triangle

نظرية ذات الحدَّين Binomial theorem

لماذا ندرس التباديل والتوافيق؟

يُعنى هذا الموضوع باختيار العناصر وترتيبها، **التباديل permutations** و**التوافيق combinations** تظهر في تطبيقات حديثة معقدة مثل: النقل العام، العلاقات بين البروتينات في الهندسة الوراثية، خوارزميات علم الحاسوب كحفظ كلمات المرور السريّة وعمليات التجارة الإلكترونية المشفرة.

تسمى عملية اختيار العناصر توافيق إذا كان ترتيب الاختيار غير مهم، ولكن إذا كان ترتيب الاختيار مهمًا، فإن عملية الاختيار تسمى تباديل.

ولتوضيح الفرق بين التباديل والتوافيق، يمكن اتباع التوصيف الآتي:

- **التباديل** هي طريقة لاختيار العناصر وترتيبها في ترتيب معيّن.

  فعلى سبيل المثال هناك ستة تباديل لحرفَين من الأحرف أ، ب، ج والتي هي:

  (أ ، ب) ، **(ب ، أ)** ، **(أ ، ج)** ، **(ج ، أ)** ، **(ب ، ج)** ، **(ج ، ب)**.

  في هذه الحالة تختلف طريقة اختيار أ أولًا ثم ب عن طريقة اختيار ب أولًا ثم أ، حيث يكون الترتيب مهمًا.

  كذلك إذا كان هناك ستة أشخاص في لجنة ما ويجب اختيار شخص واحد ليكون رئيسًا لها وشخص آخر ليكون نائبه، فمن بين الأشخاص المرقمين بالأرقام: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

  يمكن أن يكون لدينا: ١ (رئيس) و٢ (نائب الرئيس) أو ٢ (رئيس) و١ (نائب الرئيس) أو ١ (رئيس) و٣ (نائب الرئيس) أو ٣ (رئيس) و١ (نائب الرئيس)، ... إلخ.

- **التوافيق** هي طريقة لاختيار العناصر دون الأخذ بعين الاعتبار ترتيبها.

  فمثلًا هناك ثلاث طرق لاختيار توافيق لحرفَين من الأحرف أ، ب، ج والتي هي: (أ، ب)، (أ، ج)، (ب، ج). إن طريقة اختيار أ أولًا ثم ب هي نفسها اختيار ب أولًا ثم أ. المهم هو أن نحصل على الحرفَين أ، ب بغض النظر عن الحرف الذي تمّ اختياره أولًا.

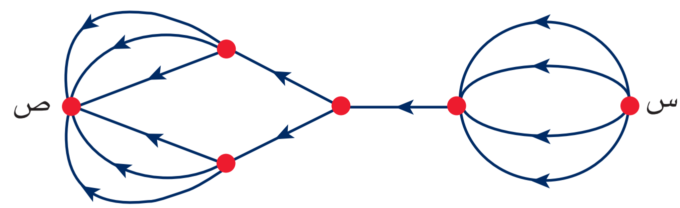
  وكمثال آخر على التوافيق: يتكوّن فريق الكرة الطائرة من ستة لاعبين، لكن فريق الكرة الطائرة الشاطئية يتكوّن من لاعبَين فقط. إذا أردنا اختيار لاعَبين من فريق الكرة الطائرة للمشاركة في لعبة الكرة الطائرة الشاطئية، فلا يهم الترتيب الذي نختارهما فيه. وإذا كان اللاعبون الستة مرقمين ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ فيمكننا اختيار اللاعبَين (١، ٢) أو (١، ٣) أو (١، ٤) أو ... إلخ.

سوف تتعلم في هذه الوحدة أيضًا كيف تفك العبارة الجبرية التي في صورة (أ س + ب)^{ن} حيث ن عدد صحيح موجب، ويسمى المفكوك من هذا النوع **مفكوك ذات الحدَّين**. وهو مهم لأنك ستستخدمه لاحقًا كوسيلة لحساب الاحتمالات.

٨-١ مضروب العدد

استكشف ١

يمثل الشكل أدناه شبكة بين س، ص (يمكننا التفكير في ذلك على أنه تمثيل للطرق (مع الأسهم) بين المدن (النقاط) أو تمثيل للأسلاك بين المكونات الإلكترونية في دائرة كهربائية، وهكذا.



١) أوجد من خلال السير باتجاه السهم، عدد المسارات الممكنة من س إلى ص.

٢) ناقش واكتب كيف يمكنك التحقق من إجابتك عن السؤال ١ من خلال العملية الحسابية.

٣) ما العملية الحسابية التي يجب استخدامها؟ ولماذا؟

عند اختيار مسار من س إلى ص في استكشف ١، وجب عليك اتخاذ قرار عند كل نقطة، كما هو مبين أدناه:

٤ خيارات   خيار واحد   خياران   ٣ خيارات

س ← • ← • ← • ← ص

في كل خطوة، عليك القيام بعملية اختيار عنصر (سهم): عدد النواتج الممكنة (الخيارات) هو ٤ وبعد ذلك ١ و بعد ذلك ٢ وبعد ذلك ٣. يدل الحرف 'و' على أننا نضرب الأعداد بعضها في بعض: ٤ × ١ × ٢ × ٣ = ٢٤ مسارًا ممكنًا من س إلى ص.

إذا عكسنا اتجاهات الأسهم، وسألنا عن عدد المسارات من ص إلى س، يبقى عدد النواتج الممكنة (الخيارات) هو ذاته، ولكنها تظهر بترتيب آخر:

٣ خيارات   خياران   خيار واحد   ٤ خيارات

ص ← • ← • ← • ← س

النواتج الممكنة هي: ٣ و ٢ و ١ و ٤، وعددها = ٣ × ٢ × ١ × ٤ = ٢٤ مسارًا ممكنًا من ص إلى س.

الخيار المتخذ عند كل نقطة هو ناتج لإيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة للوصول من س إلى ص أو من ص إلى س نضرب أعداد النواتج الممكنة عند كل خطوة، ويمكن ضرب هذه الأعداد في بعضها بأي ترتيب.

مُساعَدة

إذا أمكن القيام بعملية كاملة في أربع خطوات، وكانت النواتج الممكنة للخطوات الأولى، والثانية، والثالثة، والرابعة هي: $ن_١$، $ن_٢$، $ن_٣$، $ن_٤$، فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للعملية كاملة هو: $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times ن_٤$

نتيجة ١

ينص المبدأ الأساسي للعد على أنه:
في عملية تتكوّن من م خطوة مستقلة، إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_١$، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_٢$، وعدد طرق إجراء الخطوة الثالثة $ن_٣$، ....، وعدد طرق إجراء الخطوة الأخيرة $ن_م$، فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة هو:
$ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times \ldots \times ن_م$

نحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة عبارات مثل: ٤ × ٣ × ٢ × ١ والطريقة المختصرة للقيام بذلك هي استخدام **مضروب العدد factorial of a number**، والذي يعرف على أنه ناتج ضرب كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي العدد المعطى وليكن ن، ويكتب في صورة **ن!**، فمثلًا: ٤ × ٣ × ٢ × ١ يعبر عن 'مضروب العدد ٤'، ويكتب ٤!

على سبيل المثال:

$٧! = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$

$\frac{٦!}{٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٤!} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

$٨! = ٨ \times ٧! = ٨ \times ٧ \times ٦! = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥! = ٤٠٣٢٠$

$٥! - ٤! = ٥ \times ٤! - ٤! = ٤!\,(٥ - ١) = ٤! \times ٤ = ٩٦$

لاحظ أن: $٢! = ٢ \times ١ = ٢$ ، $١! = ١$

نتيجة ٢

$ن! = ن\,(ن - ١)(ن - ٢) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$، حيث ن عدد صحيح موجب.

مُساعَدة

حالة خاصة عندما ن = ٠، فإن ٠! = ١

مثال ١

دون استخدام الآلة الحاسبة، أوجِد قيمة $\frac{٨!}{٦!} + \frac{٥!}{٤!}$

الحـلّ:

$\frac{٨!}{٦!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦!}{٦!} = ٨ \times ٧ = ٥٦$

$\frac{٥!}{٤!} = \frac{٥ \times ٤!}{٤!} = ٥$

$\therefore \frac{٨!}{٦!} + \frac{٥!}{٤!} = ٥٦ + ٥ = ٦١$

مثـــال ٢

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد أصغر قيمة للعدد الصحيح ن، حيث $ن! > ٤٠٠٠٠$

الحـــلّ:

علينا استخدام طريقة التجربة والخطأ بفرض قيم لـ ن بحيث تحقق $ن! > ٤٠٠٠٠$

على سبيل المثال:

جرب $١٠! = ٣٦٢٨٨٠٠$، إنه كبير جدًا.

جرب $٦! = ٧٢٠$، إنه صغير جدًا.

جرب $٨! = ٤٠٣٢٠$، إنه أكبر قليلًا ممّا يجب.

جرب $٧! = ٥٠٤٠$، إنه صغير جدًا.

∴ أصغر قيمة للعدد الصحيح ن هي ٨

مُساعَدة

لكتابة ٦! على الآلة الحاسبة، انقر على ٦ ثم انقر على المفتاح n!

تمارين ٨-١

١) دون استخدام الآلة الحاسبة، أوجِد قيمة:

أ) $\frac{٥!}{٣!}$

ب) $\frac{٤!}{٢!} - ٣!$

ج) $٧ \times ٤! + ٢١ \times ٣!$

د) $\frac{١٠!}{٨!} + \frac{٩!}{٧!}$

هـ) $\frac{٢٠!}{١٨!} - \frac{١٣!}{١١!}$

٢) استخدم الآلة الحاسبة لتجد أصغر قيمة لـ ن بحيث يكون:

أ) $ن! > ١٠٠٠٠٠٠$

ب) $٥! \times ٦! < ن!$

ج) $(ن!)! > ١٠^{٣}$

٣) استخدم الآلة الحاسبة لتجد أكبر قيمة لـ ن بحيث يكون:

أ) $\frac{ن!}{٥٠٠٠٠٠} < ٨٠$

ب) $١,٥ \times ١٠^{١٢} - ن! > ٠$

ج) $\frac{ن!}{(ن - ٢)!} < ٥٠٠$

٤) عبّر عن مساحة مستطيل أبعاده ٥٣ سم، ٥٢ سم باستخدام مضروب العدد.

٥) متوازيا مستطيل أبعادهما: الأول ٢٥ سم، ٢٤ سم، ٢٣ سم، والثاني ٨ سم، ٧ سم، ٦ سم. عبّر عن الفرق بين حجمَيهما بدلالة المضروب.

٦) تسعة تجار لدى كل منهم في المتجر ثمانية صناديق من البيض، وفي كل صندوق ست بيضات. إذا كان ثمن البيضة الواحدة ٠,٠٧ ريال عُماني، فاكتب ثمن البيض كله باستخدام المضروب.

٧) ما أصغر عدد صحيح نضربه في ٦! ليكون الناتج عددًا مربعًا؟

٨) ما أصغر عدد صحيح عندما تقسم ١٠! عليه ليكون الناتج عددًا مربعًا؟

٨-٢ التباديل

يمكن أن نستخدم التباديل بأخذ عدد من العناصر وترتيبها في صف مستقيم.

فمثلًا: إذا أردنا تكوين عدد من الرقمين ٥، ٩ فإننا نحصل على ٩٥ و ٥٩ فنلاحظ أن موقع الرقمين ٥ و ٩ يغير من قيمة العدد.

على الرغم من أنه يوجد عدة أساليب يمكن استخدامها لإيجاد عدد التباديل الممكنة للعناصر، إلّا أنها جميعًا تتضمن المضروب.

٨-٢أ تباديل ن من العناصر المختلفة

يرمز لتباديل **ن** من العناصر المختلفة بالرمز $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ (وتقرأ نون لام نون)، وعددها **ن!** تبديلًا.

فمثلًا، $^{٢}\text{ل}_{٢}$ = ٢! = ٢ تبديلًا للرقمَين ٥، ٩ كما بيّنا سابقًا.

نتيجة ٣

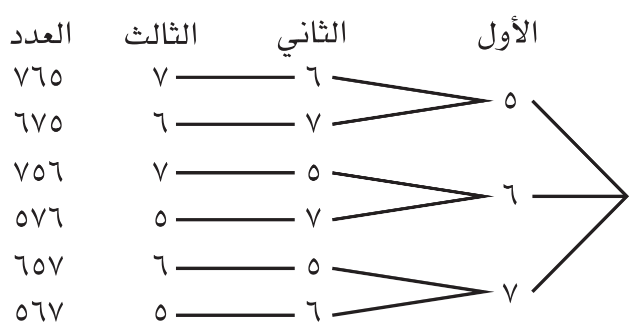
عدد تباديل **ن** من العناصر المختلفة هو $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ = ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) ×...× ٣ × ٢ × ١

حيث ن عدد صحيح موجب.

فمثلًا: الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة والتي يمكن تكوينها من الأرقام ٥، ٦، ٧ هي:

٥٦٧ ، ٥٧٦ ، ٦٥٧ ، ٦٧٥ ، ٧٥٦ ، ٧٦٥

ويوضح مخطط الشجرة الآتي طريقة أخرى (بديلة) للتباديل الستة الممكنة للأرقام الثلاثة المختلفة:



هذه الطرق مناسبة لإيجاد تباديل عدد قليل من العناصر، ولكن تخيّل تشكيل قائمة لإيجاد تباديل ٧ أحرف، سيكون عدد التباديل أكثر من ٥٠٠٠ تبديلًا، وسيكون عدد فروع مخطط الشجرة أكثر من ٥٠٠٠ فرع.

لذلك نحتاج إلى طريقة عملية أكثر لإيجاد عدد التباديل، ويعد المضروب أفضل هذه الطرق.

حيث يمكنك أن تبيّن الأعداد الستة المكوّنة من الأرقام الثلاثة ٥، ٦، ٧ باعتماد عدد الخيارات التي يمكن فيها وضع الرقم في كل منزلة في التبديل. نجد ثلاثة خيارات للرقم الأول، وخيارَين للرقم الثاني، وأخيرًا يتبقى خيارًا واحدًا للرقم الثالث فقط فيكون:

٣	×	٢	×	١
خيارات		خياران		خيار

تمثل الأعداد السابقة عدد الخيارات الممكنة لوضع الأرقام الثلاثة عند تكوين التباديل.

يمكن ترتيب الأرقام الثلاثة بـ ٦ طرق كالآتي: ٣ × ٢ × ١ = ٣! = $^{٣}ل_{٣}$ = ٦ طرق.

مثال ٣

بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب خمسة أولاد في صف مستقيم؟

الحل:

$^{٥}ل_{٥}$ = ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة.

نضرب أعداد الخيارات لكل موقع من المواقع الخمسة من اليمين إلى اليسار.

مثال ٤

بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب تسعة كتب رياضيات مختلفة، وأربعة كتب فيزياء مختلفة في رف؟

الحل:

$^{١٣}ل_{١٣}$ = ١٣! = ٦٢٢٧٠٢٠٨٠٠ طريقة.

ترتيب ١٣ كتابًا مختلفًا.

تمارين ٨-٢أ

١) بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب الأحرف الستة أ، ب، ج، د، هـ، و في صف مستقيم؟

٢) يوجد في قاعة اجتماعات ١٠ عمانيين، و٢٠ سعوديًا. أوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب العناصر الآتية في صف مستقيم:

أ العمانيون. ب السعوديون. ج جميع الأشخاص.

٣) بكم طريقة مختلفة يمكن أن يقف في صف مستقيم كلًا من:

أ معلمان. ب ٦ طلاب. ج ٨ أشخاص.

٤) بكم طريقة مختلفة يمكن أن تجلس معًا على مقعد في صف واحد كلّ من:

أ ٤ ممرضات. ب ٣ طبيبات. ج ٤ ممرضات و٣ طبيبات.

٥) سبع سيارات، و(س) حافلة يمكن أن تُركن في صف مستقيم بطرق عددها ٣٩٩١٦٨٠٠

أوجد عدد الطرق التي يمكن أن تُركن بها ٥ سيارات، و(س + ٢) حافلة في صف مستقيم.

٦) أم لديها ١٠ أبناء. رتبت ١١ كرسيًا في صف مستقيم وجلست على الكرسي الواقع في المنتصف. إذا جلس ابنها الأصغر على كرسي إلى يسارها مجاورًا لها، فبكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس بقية الأبناء؟

★ ٧) يمكن ترتيب (ن) ولدًا في صف مستقيم بعدد معيّن من الطرق. عند إضافة ولدَين إلى مجموعة الأولاد، يزداد عدد التباديل الممكنة بمقدار ٤٢٠ ضعفًا. أوجِد قيمة ن.

٨-٢ب تباديل ن عنصرًا مع السماح بالتكرار

عندما تتضمن مجموعة ما ن عنصرًا بعضها مكرر (عندما لا تكون جميعها مختلفة أو متمايزة)، فسيكون عدد التباديل أقل من $^{ن}ل_{ن}$ تبديلًا، لذا نحتاج إلى تعديل لاستخدام المضروب.

افترض أنك تعمل على ترتيب الأحرف الخمسة الآتية: أ، أ، ب، ج، د

لتبسيط المسألة يمكن أن تميّز الحرف أ المكرر بتغيير لونه هكذا أ، أ، ب، ج، د

فيكون التبديل أ أ ب ج د هو التبديل نفسه أ أ ب ج د

وكذلك د أ ج أ ب التبديل نفسه د أ ج أ ب ، وهكذا.

في كل مرة نبدّل أ، أ نحصل على التبديل نفسه.

إذا كانت الأحرف الخمسة مختلفة يكون عدد التباديل $^{٥}ل_{٥}$ = ٥! = ١٢٠ تبديلًا، لكن هنا ينقص عدد التباديل الممكنة؛ وذلك بسبب وجود حرفين متشابهين (مكررين) يترتبان بطريقتين ٢!

∵ عدد الأحرف المطلوب ترتيبها = ٥، عدد الأحرف المكررة = ٢

فيكون عدد التباديل الممكنة للأحرف الخمسة $\frac{^{٥}ل_{٥}}{^{٢}ل_{٢}} = \frac{٥!}{٢!} = ٦٠$

نتيجة ٤

عدد تباديل ن من العناصر تحوي ر من العناصر المتشابهة فيما بينها، م من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها، هـ من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها ... وهكذا يساوي:

$$\frac{^{ن}ل_{ن}}{ر! \times م! \times هـ! \times \dots} = \frac{ن!}{ر! \times م! \times هـ! \times \dots}$$

مثـال ٥

أوجد عدد التباديل المختلفة لأحرف كلمة (القسطنطينية).

الحـلّ:

$\frac{١١!}{٢! \times ٢! \times ٢!}$ = ٤٩٨٩٦٠٠ تبديلًا

سيُرتب ١١ حرفًا فيها اثنان ط، اثنان ن، اثنان ي

تمارين ٨-٢ب

١) أوجِد عدد التباديل المختلفة لأحرف كل كلمة من الكلمات الآتية:

أ جدول.
ب صلالة.
ج رادار.
د ميسيسيبي.
هـ كوالالمبور.

٢) كم عددًا مختلفًا مكوّنًا من ستة أرقام يمكن تكوينها باستخدام مجموعات الأرقام الآتية؟

أ ١، ١، ١، ١، ١، ٣
ب ٢، ٢، ٢، ٧، ٧، ٧
ج ٥، ٦، ٦، ٦، ٧، ٧
د ٨، ٨، ٩، ٩، ٩، ٩

٣) لدى معلمة رياضيات ٢٠ مربعًا بلاستيكيًا، منها خمسة مربعات حمراء اللون، سبعة مربعات زرقاء اللون، ثمانية مربعات خضراء اللون. إذا تم وضعها متلاصقة في صف مستقيم، فكم تبديلًا مختلفًا يمكن أن تُكوّن باستخدام:

أ مربع واحد من كل لون.
ب ٥ مربعات حمراء فقط.
ج جميع المربعات الزرقاء والخضراء.
د المربعات الـ ٢٠ جميعها.

٤) وُضِعت عشر قطع نقدية في صف مستقيم على طاولة بحيث تظهر صورة أو كتابة على كل منها.

أ ما التباديل المختلفة الممكنة لوضع القطع النقدية العشر؟
ب من إجابة الجزئية (أ)، أوجد عدد التباديل المختلفة التي تظهر فيها:
١) الصورة ٥ مرات والكتابة ٥ مرات.
٢) الصور أكثر من الكتابة.

٥) يوجد ٤٢٠ تبديلًا مختلفًا لأحرف كلمة مكوّنة من سبعة أحرف. صِف أحرف هذه الكلمة.

٦) أوجِد عدد الطرق المختلفة الممكنة لترتيب خمسة أحرف من الحروف الهجائية في كل حالة من الحالات الآتية:

أ حرفَي أ، و٣ أحرف ب.
ب حرفَي علّة متطابقين، و٣ أحرف ب.
ج حرفَي علّة متطابقين، و٣ أحرف متطابقة غير أحرف العلّة.

٨-٢ج تباديل ن من العناصر المختلفة بوجود القيود

ينقص عدد التباديل الممكنة للعناصر عندما توضع عليها قيود.

وكقاعدة عامة يجب استقصاء عدد التباديل الممكنة للمواقع المقيدة أولًا، ثم للمواقع غير المقيدة.

مثـال ٦

أوجِد عدد الطرق الممكنة لترتيب ستة رجال في صف مستقيم بحيث يكون:

أ أكبرهم عمرًا في بداية الصف من جهة اليمين.

ب الاثنان الأصغر عمرًا في نهاية الصف من جهة اليسار.

ج أقصرهم طولًا لا يكون في أي من نهايتَي الصف.

الحـلّ:

من دون وجود القيود يمكن ترتيب الرجال الستة بطرق عددها = ٦! = ٧٢٠ طريقة، ولكن مع وجود القيود سينقص عدد الطرق عن ٧٢٠

أ $١ \times {}^{٥}\text{ل}_{٥} = ١ \times ٥! = ١٢٠$ طريقة

الرجل الأكبر سنًا يقف عند بداية الصف من اليمين، لذا له خيار واحد فقط، ويمكن ترتيب الرجال الخمسة الآخرين بطرق عددها ${}^{٥}\text{ل}_{٥}$.

ب $\underbrace{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}_{{}^{٤}\text{ل}_{٤}} \times \underbrace{٢ \times ١}_{{}^{٢}\text{ل}_{٢}}$

${}^{٤}\text{ل}_{٤} \times {}^{٢}\text{ل}_{٢} = ٤! \times ٢! = ٤٨$ طريقة

حُدد موقع الاثنَين الأصغر عمرًا عند نهاية الصف من اليسار، ويمكن أن يحدد موقعهما بطرق عددها ${}^{٢}\text{ل}_{٢}$. يمكن ترتيب الرجال الأربعة الآخرين بطرق عددها ${}^{٤}\text{ل}_{٤}$.

ج $٥ \times \underbrace{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}_{{}^{٤}\text{ل}_{٤}} \times ٤$

$٥ \times {}^{٤}\text{ل}_{٤} \times ٤ = ٥ \times ٤! \times ٤ = ٤٨٠$ طريقة

يمكن لخمسة رجال فقط الوقوف في بداية الصف، لذا من الممكن أن يقف أربعة رجال فقط في نهاية الصف. يمكن أن تملأ الأماكن الأربعة المتبقية بأي من الرجال الأربعة الآخرين (أحدهم هو الرجل الأقصر) من خلال ${}^{٤}\text{ل}_{٤}$ طريقة كما هو مبين.

طريقة بديلة لحل الجزئية (ج):

يمكن أن يقف أقصرهم في أربعة أماكن، أما الخمسة الآخرون فيمكن ترتيبهم بطرق عددها ${}^{٥}\text{ل}_{٥}$، فيكون $٤ \times ٥! = ٤٨٠$ طريقة

طريقة بديلة:

يمكن استخدام النمذجة لترتيب ستة رجال حسب القيود كالآتي:

أ

١	٥	٤	٣	٢	١
الأكبر عمرًا					

عدد الطرق = $١ \times ٥! = ١٢٠$ طريقة

ب

٤	٣	٢	١	٢	١
				الأصغر (نهاية الصف)	

عدد الطرق = $٤! \times ٢! = ٤٨$ طريقة

ج

٥	٤	٣	٢	١	٤

عدد الطرق = $٥ \times ٤! \times ٤ = ٤٨٠$ طريقة

مثـــال ٧

كم عدداً فرديًا مختلفًا مكوّنًا من أربعة أرقام أكبر من ٣٠٠٠ يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤ (لا يسمح بتكرار الأرقام)؟

الحـــلّ:

القيود تؤثر على أرقام منزلة الألوف ومنزلة الآحاد. الرقم الذي يمكن وضعه في منزلة الألوف ٣ أو ٤ فقط، والرقم الذي يمكن وضعه في منزلة الآحاد ١ أو ٣ فقط. يمكن وضع الرقم ٣ في أي من منزلتَي الآحاد أو الألوف، لذا سنستقصي مواقع الأرقام الأربعة بدءًا من الرقم ٣، وكذلك مواقع الأرقام الأربعة بدءًا من الرقم ٤

الحالة الأولى: نبدأ بالرقم ٣ في خانة الألوف

$١ \times \underbrace{٢ \times ١}_{ل_٢^٢} \times ١$

ابدأ بالرقم ٣: يجب وضع الرقم ١ في منزلة الآحاد بطريقة واحدة، ويتبقى منزلتان نضع فيهما الرقمَين المتبقيَين بطرق عددها $ل_٢^٢$.

$١ \times ل_٢^٢ \times ١ = ٢$ (عددين)

الحالة الثانية: نبدأ بالرقم ٤ في خانة الألوف

$٢ \times \underbrace{٢ \times ١}_{ل_٢^٢} \times ١$

ابدأ بالرقم ٤: نضع ١ أو ٣ في منزلة الآحاد، ويتبقى منزلتان نضع فيهما الرقمَين المتبقيَين بطرق عددها $ل_٢^٢$.

$٢ \times ل_٢^٢ \times ١ = ٤$ أعداد.

عدد الأعداد الممكنة = ٢ + ٤ = ٦ أعداد فردية أكبر من ٣٠٠٠ يمكن تكوينها.

طريقة بديلة:

هناك طريقة بديلة يمكن بها حل المسألة باستقصاء الأعداد بشكل منفصل، والتي تحقق القيود المذكورة، وهذه الأعداد هي:

٣٢٤١ ، ٣٤٢١ ، ٤١٢٣ ، ٤٢١٣ ، ٤٢٣١ ، ٤٣٢١

مثـــال ٨

بكم طريقة مختلفة يمكن أن نضع حبتَي مانجو (م)، و٣ حبات بطيخ (ب) في صف مستقيم وإذا كانت حبات الفواكه الخمس مختلفة، بحيث تكون حبتا المانجو:

أ متجاورتَين.

ب غير متجاورتَين.

الحـــلّ:

أ $\underbrace{\overbrace{\underbrace{م_١\ م_٢}_{\text{عنصر واحد}}}^{ل_٢^٢}\ ب_١\ ب_٢\ ب_٣}_{ل_٤^٤}$

توضع حبتا المانجو متجاورتَين بطريقتَين $ل_٢^٢$. يُعدّ هذا الزوج عنصرًا واحدًا ليرتب مع حبات البطيخ الثلاث، فيكون عدد العناصر المطلوب ترتيبها أربعة.

$ل_٢^٢ \times ل_٤^٤ = ٤٨$ طريقة

مُساعَدة

تعامل العناصر المتجاورة غير المتباعدة كعنصر واحد عند ترتيبها مع العناصر الأخرى.

ب ١٢٠ − ٤٨ = ٧٢ طريقة.

بدون قيود العناصر الخمسة ترتب في طرق عددها ${}^{٥}ل_{٥}$ = ٥! = ١٢٠ طريقة. وعرفنا أنه عندما تكون حبتا المانجو متجاورتَين يكون عدد طرق الترتيب ٤٨ طريقة من ١٢٠ طريقة.

طريقة بديلة:

بما أن الفواكه متمايزة يكون تبادل حبات المانجو ${}^{٢}ل_{٢}$، ويكون تبادل حبات البطيخ ${}^{٣}ل_{٣}$ كما توضحه الحالات الآتية:

ب = ${}^{٣}ل_{٣}$

١	٢	١	٣	٢

م = ${}^{٢}ل_{٢}$

عدد الطرق = ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٣}ل_{٣}$ = ١٢ طريقة

١	١	٢	٣	٢

م = ${}^{٢}ل_{٢}$

عدد الطرق = ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٣}ل_{٣}$ = ١٢ طريقة

١	١	٢	٣	٢

م = ${}^{٢}ل_{٢}$

عدد الطرق = ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٣}ل_{٣}$ = ١٢ طريقة

١	١	٢	٢	٣

م = ${}^{٢}ل_{٢}$

عدد الطرق = ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٣}ل_{٣}$ = ١٢ طريقة

١	١	٢	٢	٣

م = ${}^{٢}ل_{٢}$

عدد الطرق = ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٣}ل_{٣}$ = ١٢ طريقة

١	١	٢	٢	٣

م = ${}^{٢}ل_{٢}$

عدد الطرق = ${}^{٢}ل_{٢}$ × ${}^{٣}ل_{٣}$ = ١٢ طريقة

∴ عدد الطرق = ١٢ + ١٢ + ١٢ + ١٢ + ١٢ + ١٢ = ٧٢ طريقة.

استكشف ٢

يمكن أن يجلس على المقعد الأمامي في إحدى قاعات الدرس في الجامعة طالبتان و٣ طلاب بطرق عددها ٥! = ١٢٠ طريقة.

تخيل التباديل مرة حيث يكون الطلاب متباعدين، ومرة حيث تكون الطالبتان متباعدتين.

تمّت الحسابات في الفرعَين (أ)، (ب) بالخطوات نفسها، مع أن المنطق في أحدهما غير سليم. أيُّ الإجابتَين صحيحة؟ وهل يمكنك أن تفسر سبب الخطأ في الإجابة الأخرى؟

أ الطالبتان متباعدتان.	ب الطلاب متباعدون.
عندما تكون الطالبتان متجاورتين يكون عدد الطرق الممكنة = ٢! = ٢ ترتيب الطلاب الثلاثة مع الطالبتين كعنصر واحد = ٤! طرق، فيكون هناك ٢! × ٤! طرق تكون فيه الطالبتان غير متباعدتَين. لذا، يوجد ٥! − (٢! × ٤!) = ٧٢ طريقة تكون الطالبتان فيها متباعدتَين.	عندما يكون الطلاب متجاورين يكون عدد الطرق الممكنة = ٣! ترتيب الطالبتين مع الطلاب كعنصر واحد = ٣! طرق، فيكون هناك ٣! × ٣! طريقة يكون فيه الطلاب غير متباعدين. لذا، يوجد ٥! − (٣! × ٣!) = ٨٤ طريقة يكون الطلاب فيها متباعدين.

تمارين ٨-٢ج

١) كم عددًا مكوّنًا من خمسة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ إذا:

أ لم توجد قيود.

ب كان العدد:

١) فرديًا ٢) زوجيًا ٣) فرديًا وأقل من ٤٠٠٠٠

٢) بكم طريقة مختلفة يمكن أن يقف أربعة رجال، وطفلان في صف مستقيم إذا:

أ وقف الطفلان في الأمام.

ب وقف طفل في الأمام ووقف رجل في الخلف.

ج وقف الطفلان متباعدين.

د وقف الرجال الأربعة غير متباعدين.

هـ لم يتجاور أي رجلين.

٣) أوجد نسبة عدد الأعداد الفردية المختلفة (المكوّنة من ستة أرقام) إلى عدد الأعداد الزوجية المختلفة (المكوّنة من ستة أرقام) باستخدام الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧

٤) بكم طريقة يمكن ترتيب ١٠ كتب مختلفة على رف في صف مستقيم إذا:

أ وضعنا أقدم كتابَين في المنتصف.

ب وضعنا الكتب الثلاثة الأحدث متجاورة.

٥) كم عددًا مختلفًا مكوّنًا من ستة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ٣ بحيث:

أ يبدأ العدد بالرقم ٢

ب لا يقبل القسمة على ٢

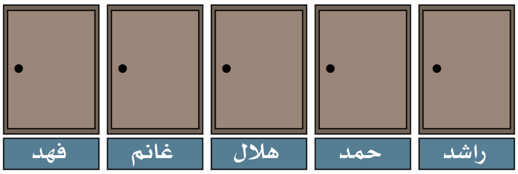
٦) أوجِد عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من كل أحرف كلمة (رياضيات) عندما تكون التباديل:

أ تبدأ بحرفَي ا وتنتهي بحرفَي ي.

ب يقع ض في المنتصف.

ج تنتهي بحروف العلة ا، ا، ي، ي.

٧) يبيّن الشكل صفًا من صناديق البريد وضعت عليها ملصقات مدوّن أسفلها اسم صاحب كل صندوق.
أوصل مكتب البريد خمسة طرود، واحدًا لكل شخص. إذا وُضع طرد واحد في كل صندوق بشكل عشوائي، فأوجِد عدد الطرق بحيث:



أ توضع الطرود الخمسة في الصناديق الصحيحة.

ب يوضع طرد واحد فقط في الصندوق الخطأ.

ج يوضع طرد صحيح في صندوق راشد، وصندوق واحد آخر فقط.

د يوضع طردان صحيحان في صندوقَين صحيحَين.

٨-٢د تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة

لقد تعاملنا مع تباديل أُخذت فيها جميع العناصر ثم رُتبت. لكننا سنبحث عن التباديل عندما نأخذ بعض هذه العناصر ونرتبها. فعندما نختار ر عنصرًا بترتيب معيّن من أصل ن عنصرًا مختلفًا، نُسمي ذلك تباديل ر عنصرًا من ن عنصرًا.

افترض مثلًا أننا نختار ثلاثة أحرف من خمسة أحرف أ، ب، ج، د، هـ ونرتبها.

يوجد ٥ خيارات للحرف الأول، و٤ خيارات للحرف الثاني، و٣ خيارات للحرف الثالث.

هذا يعطي ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ تبديلًا، وهذا يكافئ:

$\frac{٥!}{(٥ - ٣)!} = \frac{٥!}{٢!} = ٦٠$ تبديلًا.

نتيجة ٥

عدد تباديل ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة بحيث ٠ ⩽ ر ⩽ ن، يرمز له بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ ويقرأ 'نون لام راء' ويعطى بالعلاقة:

$$^{ن}ل_{ر} = ن \times (ن - ١) \times (ن - ٢) \times \ldots \times (ن - ر + ١) = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

مثـــال ٩

كم عددًا مختلفًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩؟

الحـــلّ:

$^{٧}ل_{٣} = \frac{٧!}{(٧ - ٣)!}$ اخترنا ٣ أرقام فقط من أصل ٧ أرقام مختلفة.

$= \frac{٧!}{٤!}$

$= ٧ \times ٦ \times ٥$

$= ٢١٠$ عددًا

طريقة بديلة:

هناك سبعة أرقام للاختيار منها.

توجد سبعة خيارات للرقم الأول، و٦ خيارات للرقم الثاني (لأننا لا نستطيع تكرار الرقم الأول) ويبقى ٥ خيارات للرقم الثالث

٧	×	٦	×	٥
خيارات		خيارات		خيارات

٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠ عددًا

مُساعَدة

إذا أردت إيجاد $^{٧}ل_{٣}$ على الآلة الحاسبة، فاضغط على المفتاح ٧، ثم على مفتاح nPr، ثم على المفتاح ٣

مثــال ١٠

بكم طريقة مختلفة يمكن أن تجلس ٤ فتيات من أصل ١٨ فتاة (أعمارهن مختلفة) على أريكة تتسع لأربعة أشخاص، وتُعطى أكبر الفتيات سنًا أحد المقاعد؟

الحــلّ:

عدد الطرق = ٤ × $^{١٧}ل_{٣}$ = ١٦٣٢٠ طريقة.

يوجد ٤ طرق للفتاة الأكبر سنًا لتأخذ مقعدًا، و$^{١٧}ل_{٣}$ طريقة لتختار ٣ فتيات من أصل ١٧ فتاة المتبقيات للجلوس معها.

مثــال ١١

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يقف ٤ أخوة (و)، و٣ أخوات (ت) من أسرة واحدة في صف مستقيم، بحيث لا يُسمح لأختين أن تقفا متجاورتَين؟

الحــلّ:

لترتيب ٤ أخوة في صف مستقيم يكون عدد التباديل هو $^{٤}ل_{٤}$.

↑ $و_{١}$ ↑ $و_{٢}$ ↑ $و_{٣}$ ↑ $و_{٤}$ ↑

يوجد $^{٤}ل_{٤}$ طريقة لترتيب ٤ أخوة في صف مستقيم.

رُتبت الأخوات في ٣ مواقع من الخمسة مواقع المشار إليها، فيكون عدد التباديل $^{٥}ل_{٣}$

∴ عدد الطرق = $^{٤}ل_{٤}$ × $^{٥}ل_{٣}$ = ١٤٤٠ طريقة.

$^{٥}ل_{٣}$ طريقة لتختار ٣ مواقع لوقوف الأخوات من أصل خمسة مواقع بين الأخوة أو بجانبهم.

مثــال ١٢

يتكوّن فريق الشطرنج من ٥ ذكور و٦ إناث. يحتاج الفريق إلى رئيس ونائب الرئيس.

بكم طريقة مختلفة يمكننا اختيار الرئيس ونائب الرئيس إذا:

أ أمكن الاختيار من جميع أعضاء الفريق؟

ب تمّ اختيار اثنين من الذكور أو اثنين من الإناث؟

ج تم اختيار أحدهما من الذكور والآخر من الإناث؟

الحــلّ:

أ الطرق الممكنة لاختيار شخصَين من ١١ شخص (الترتيب مهم) يساوي:

$^{١١}ل_{٢} = \frac{!١١}{!(١١ - ٢)} =$ ١١٠ طريقة.

ب الطرق الممكنة لاختيار اثنين من الذكور (الترتيب مهم) يساوي:

$^{٥}ل_{٢} = \frac{!٥}{!(٥ - ٢)} =$ ٢٠ طريقة.

الطرق الممكنة لاختيار اثنين من الإناث (الترتيب مهم) يساوي:

$^{٦}ل_{٢} = \frac{!٦}{!(٦ - ٢)} =$ ٣٠ طريقة.

∴ الطرق الممكنة = ٢٠ + ٣٠ = ٥٠ طريقة.

ج إذا كان الرئيس من الذكور (حيث توجد ٥ اختيارات)، فيجب أن يكون نائب الرئيس من الإناث (٦ اختيارات)
وعليه، عدد الخيارات يساوي ٥ × ٦ = ٣٠ خيارًا.
إذا كان الرئيس من الإناث (حيث توجد ٦ اختيارات)، فيجب أن يكون نائب الرئيس من الذكور (٥ اختيارات)
وعليه، عدد الخيارات يساوي ٦ × ٥ = ٣٠ خيارًا.
وعليه، فإن إجمالي عدد الطرق = ٣٠ + ٣٠ = ٦٠ طريقة.

مُساعَدة

أو تعني عملية جمع (+)
و تعني عملية ضرب (×)

تمارين ٨-٢د

١) ما عدد تباديل:

أ ٥ عناصر من ٧ عناصر مختلفة؟

ب ٤ عناصر من ٩ عناصر مختلفة؟

٢) يوجد ١٢ كتابًا. بكم طريقة تختار نصفها وترتبها على رفّ في صف مستقيم؟

٣) بكم طريقة مختلفة يمكن أن تُمنح الميداليات الذهبية، والفضية، والبرونزية للمراكز الثلاثة الأولى في سباق بين ٢٠ رياضيًا؟

٤) أ أوجِد عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها لأحمد أن يطلي الباب الأمامي بلون مختلف عن الباب الخلفي لمنزله إذا توافر له ١٤ لون طلاء ليختار من بينها.

ب بكم طريقة مختلفة يمكن لأحمد القيام بذلك إذا رغب في طلاء البابَين باللون نفسه أيضًا؟

٥) أوجِد عدد الكلمات المختلفة والتي يمكن تكوينها من ٤ أحرف من الأحرف أ، ب، ج، د، هـ، ز بحيث:

أ تبدأ الكلمة بالحرف أ.

ب تتضمن الكلمة الحرف أ.

٦) مجموعة مكونة من ١٠ طلاب من الصف التاسع، و٧ طلاب من الصف العاشر في إحدى المدارس، سيتم اختيار طالبين للعب دور الطبيب والمريض في مسرحية ما، بكم طريقة مختلفة سيتم اختيارهما للعب هذَين الدورَين بحيث يقع الاختيار على:

أ أيّ من أفراد المجموعة.

ب طالبين من الصف العاشر أو طالبين من الصف التاسع.

ج طالب من الصف العاشر وطالب من الصف التاسع.

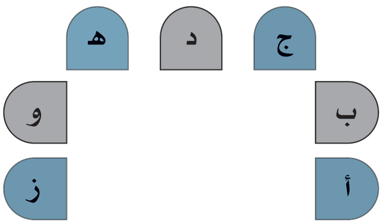
٧) دون تكرار أي رقم، كم عددًا زوجيًّا مختلفًا مكوّنًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧ ؟

٨) كم عددًا مختلفًا مكوّنًا من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ٠، ١، ٢، ٣، ٤ بحيث يُستخدم كل رقم مرة واحدة فقط. إذا كان العدد:

أ من مضاعفات العدد ١٠

ب منزلة آحاده ليست صفرًا.

٩) رُتبت الكراسي أ، ب، ج، د، هـ، و، ز كما هو مُبيّن في الشكل. بكم طريقة مختلفة يمكن أن يجلس عليها ٧ أشخاص من أصل ١٢ شخصًا إذا طُلب إلى ٣ أشخاص معيّنين الجلوس على المقاعد ب، د، و بترتيب عشوائي؟



٨-٣ التوافيق

التوافيق هي اختيارات بحيث يكون الترتيب غير مهم. فاختيار فراولة وآيس كريم من قائمة، ما هي إلّا الاختيار نفسه للآيس كريم والفراولة.

عندما نختار ر عنصرًا بدون ترتيب من أصل ن عنصرًا مختلفًا نُسمي هذا **توافيق**.

كما درست سابقًا، فإن تباديل ر عنصرًا من ن عنصرًا هو: $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

لتجد عدد التوافيق تحتاج إلى قسمة عدد التباديل على ر!، أي $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$

نتيجة ٦

عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة، حيث ٠ ⩽ ر ⩽ ن، يرمز إليه بالرمز $\binom{ن}{ر}$ ويقرأ 'نون فوق راء'

حيث $\binom{ن}{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{ر!(ن - ر)!}$

افترض أننا نريد أن نختار ٣ أطفال من مجموعة فيها ٥ أطفال. ننظر إلى هذه المهمة على أنها 'اختيار ٣ أطفال' أو 'عدم اختيار طفلين'. بغض النظر عن كيفية ملاحظة ذلك، فإن عدد طرق اختيار ٣ من ٥ أو اختيار ٢ من ٥ متساوٍ.

ويكون $\binom{٥}{٣} = \binom{٥}{٢}$

ويمكن الإشارة إلى القواعد الآتية حيث ٠ ⩽ ر ⩽ ن:

- $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$
- $\binom{ن}{ر} \leqslant {}^{ن}ل_{ر}$
- $\binom{ن}{٠} = \binom{ن}{ن} = ١$
- $\binom{ن}{١} = ن$

مثال ١٣

بكم طريقة مختلفة يمكن أن نختار ٣ سمكات من وعاء يحتوي على ٧ سمكات؟

الحــلّ:

$\binom{٧}{٣} = \frac{٧!}{٣! \times ٤!} = ٣٥$ طريقة ...... اخترنا ٣ سمكات من ٧ سمكات.

مثـال ١٤

بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٥ كتب و٣ صُحف من ٨ كتب و٦ صُحف؟

الحــلّ:

الطرق الممكنة لاختيار ٥ كتب = $\binom{٨}{٥}$ = ٥٦ طريقة. اخترنا خمسة كتب من ثمانية.

الطرق الممكنة لاختيار ٣ صحف = $\binom{٦}{٣}$ = ٢٠ طريقة. اخترنا ثلاث صحف من ست.

عدد الطرق = $\binom{٨}{٥} \times \binom{٦}{٣}$ = ٥٦ × ٢٠

= ١١٢٠ طريقة.

مُساعَدة

لقد تمّ اختيار الكتب والصحف بشكل مستقل، لذا نستخدم التوافيق لحساب عدد الطرق.

مثـال ١٥

يُراد اختيار فريق مكوّن من ٥ أشخاص من بين ٦ نساء و ٥ رجال. أوجِد عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق بحيث يكون عدد النساء في الفريق أكثر من عدد الرجال.

الحــلّ:

	الاختيار من ٦ نساء	الاختيار من ٥ رجال	عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق
	٣	٢	$\binom{٦}{٣} \times \binom{٥}{٢}$ = ٢٠٠
أو	٤	١	$\binom{٦}{٤} \times \binom{٥}{١}$ = ٧٥
أو	٥	٠	$\binom{٦}{٥} \times \binom{٥}{٠}$ = ٦

يبيّن الجدول الطرق الممكنة لتشكيل الفريق ليكون عدد النساء فيه أكثر من عدد الرجال، وكذلك عدد الطرق التي يمكنها اختيار الفرق.

عدد الطرق الممكنة لاختيار الفريق = ٢٠٠ + ٧٥ + ٦ = ٢٨١ طريقة.

تمارين ٨-٣

١) أوجِد عدد الطرق الممكنة لاختيار ٥ تفاحات من بين:

أ ٨ تفاحات.

ب ٩ تفاحات، و ١٢ برتقالة.

٢) من بين ٧ رجال و ٨ نساء، أوجِد عدد الطرق الممكنة لاختيار:

أ ٤ رجال و ٥ نساء.

ب ثلاثة رجال و ٦ نساء.

ج على الأقل ١٣ شخصًا.

٣) مجموعة من الأطفال مكوّنة من ٦ فتيان و ٧ فتيات، أوجِد عدد الطرق الممكنة لاختيار مجموعة مكوّنة من ٣ أطفال يكون فيها عدد الفتيات أكثر.

٤) يُراد أن تُركن ١٠ سيارات في ساحة للسيارات تتضمن ٢٠ موقفًا مصممة على هيئة صفَّين كل صف يتسع لـ ١٠ سيارات. كم نمطًا مختلفًا للمواقف الشاغرة إذا:

- **أ** رُكنت السيارات في أي من المواقف العشرين.
- **ب** رُكنت السيارات في الصف نفسه.
- **ج** رُكن العدد نفسه من السيارات في كل صف.
- **د** عدد السيارات التي رُكنت في أحد الصفين تزيد بمقدار ٢ عن الصف الآخر.

★ **٥)** لدينا ٣ أزواج من التوائم و ٤ بنات لا علاقة بينهن. كم خيارًا من خمسة أشخاص يمكن تكوينه إذا تم اختيار:

- **أ** زوجين من التوائم.
- **ب** زوج واحد من التوائم.

٨-٤ نظرية ذات الحدين

٨-٤أ مثلث باسكال

عرفت سابقًا أن $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$

يمكن استخدام مفكوك $(أ + ب)^{٢}$ لإيجاد مفكوك $(أ + ب)^{٣}$:

$$(أ + ب)^{٣} = (أ + ب)\,(أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢})$$

$$= أ^{٣} + ٢ أ^{٢} ب + أ ب^{٢} + أ^{٢} ب + ٢ أ ب^{٢} + ب^{٣}$$

$$= أ^{٣} + ٣ أ^{٢} ب + ٣ أ ب^{٢} + ب^{٣}$$

وبالمثل نجد أن $(أ + ب)^{٤} = أ^{٤} + ٤ أ^{٣} ب + ٦ أ^{٢} ب^{٢} + ٤ أ ب^{٣} + ب^{٤}$

يمكن كتابة مفكوك $(أ + ب)^{ن}$، حيث ن = ٠، ١، ٢، ٣، ٤ كالآتي:

$$(أ + ب)^{٠} = ١$$

$$(أ + ب)^{١} = ١ أ + ١ ب$$

$$(أ + ب)^{٢} = ١ أ^{٢} + ٢ أ ب + ١ ب^{٢}$$

$$(أ + ب)^{٣} = ١ أ^{٣} + ٣ أ^{٢} ب^{١} + ٣ أ^{١} ب^{٢} + ١ ب^{٣}$$

-١ -١ $+١$ $+١$

$$(أ + ب)^{٤} = ١ أ^{٤} + ٤ أ^{٣} ب + ٦ أ^{٢} ب^{٢} + ٤ أ ب^{٣} + ١ ب^{٤}$$

إذا نظرت إلى مفكوك $(أ + ب)^{٤}$ تلاحظ أن أسس أ، ب تشكّل نمطًا حيث:

- يتناقص أس (أ) واحدًا في كل حد عن الحد الذي يسبقه مباشرة.
- يزداد أس (ب) واحدًا في كل حد عن الحد الذي يسبقه مباشرة.
- مجموع الأسَّين في كل حدّ من الحدود ($أ^{٤}$، $٤ أ^{٣} ب$، $٦ أ^{٢} ب^{٢}$، $٤ أ ب^{٣}$، $ب^{٤}$) يساوي العدد ٤
- عدد الحدود في كل صف يزيد عن قيمة ن بمقدار واحد.

هناك نمط في المفكوكات الأخرى، حيث تشكّل معاملات الحدود نمطًا ويعرف بـ **مثلث باسكال** **Pascal's triangle**.

ن = ٠	١
ن = ١	١ ١
ن = ٢	١ ٢ ١
ن = ٣	١ ٣ ٣ ١
ن = ٤	١ ٤ ٦ ٤ ١

مُساعَدة

- يبدأ كل صف بالعدد ١ وينتهي به.
- كل عدد هو مجموع العددَين من الصف الذي فوقه مباشرة.

الصف التالي سيكون:

ن = ٥: ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

ويمكن استخدامه لكتابة مفكوك $(أ + ب)^{٥}$:

$$(أ + ب)^{٥} = ١ أ^{٥} + ٥ أ^{٤} ب + ١٠ أ^{٣} ب^{٢} + ١٠ أ^{٢} ب^{٣} + ٥ أ ب^{٤} + ١ ب^{٥}$$

استكشف ٣

١

١ ١

١ ٢ ١

١ ٣ ٣ ١

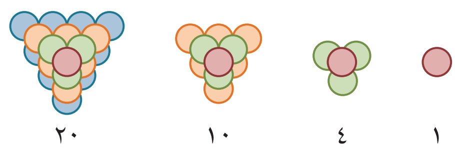
١ ٤ ٦ ٤ ١

١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

يوجد العديد من الأنماط في مثلث باسكال.

مثلًا، تمّ تلوين الأعداد ١ ، ٤ ، ١٠ ، ٢٠ باللون الأحمر.



١) أي الأنماط العددية يمكن أن تجد في مثلث باسكال؟

٢) ماذا تلاحظ إذا وجدت مجموع أعداد كل صف في مثلث باسكال؟

مثــال ١٦

استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك كل عبارة جبرية من العبارتَين الآتيتَين:

أ $(٣س + ٢)^{٣}$ **ب** $(٥ - ٢س)^{٤}$

الحــلّ:

أ $(٣س + ٢)^{٣}$

الأس ٣ لذا استخدم الصف (عندما ن = ٣) في مثلث باسكال (١، ٣، ٣، ١)

$$(٣س + ٢)^{٣} = ١(٣س)^{٣} + ٣(٣س)^{٢}(٢) + ٣(٣س)(٢)^{٢} + ١(٢)^{٣}$$

$$= ٢٧س^{٣} + ٥٤س^{٢} + ٣٦س + ٨$$

ب $(٥ - ٢س)^{٤}$

الأس ٤ لذا استخدم الصف (عندما ن = ٤) في مثلث باسكال (١، ٤، ٦، ٤، ١)

$$(٥ - ٢س)^{٤} = ١(٥)^{٤} + ٤(٥)^{٣}(-٢س) + ٦(٥)^{٢}(-٢س)^{٢} + ٤(٥)(-٢س)^{٣} + ١(-٢س)^{٤}$$

$$= ٦٢٥ - ١٠٠٠س + ٦٠٠س^{٢} - ١٦٠س^{٣} + ١٦س^{٤}$$

تمارين ٨-٤أ

١) اكتب الصفَّين في مثلث باسكال عندما:

أ ن = ٥

ب ن = ٦

٢) استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك كل ممّا يأتي:

أ $(١ + س)^{٣}$ **ب** $(١ - س)^{٤}$ **ج** $(ل + ق)^{٤}$ **د** $(٢ + س)^{٣}$

هـ $(س + ص)^{٤}$ **و** $(ص + ٤)^{٣}$ **ز** $(أ - ب)^{٣}$ **ح** $(٢س + ص)^{٤}$

ط $(س - ٢ص)^{٣}$ **ي** $(٣س - ٤)^{٤}$ **ك** $\left(س + \frac{٢}{س}\right)^{٣}$ **ل** $\left(س^{٢} - \frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٣}$

٣) إذا علمت أن $(٣ + س)^{٥} + (٣ - س)^{٥} = أ + ب س^{٢} + جـ س^{٤}$، فأوجد قيمة كلٍّ من : أ، ب، جـ.

٤) **أ** أوجِد مفكوك $(٢ + س)^{٤}$

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتكتب $(٢ + \sqrt{٣})^{٤}$ في صورة $أ + ب\sqrt{٣}$

٥) **أ** أوجِد مفكوك $(١ + س)^{٣}$

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتكتب:

١) $(١ + \sqrt{٥})^{٣}$ في صورة $أ + ب\sqrt{٥}$

٢) $(١ - \sqrt{٥})^{٣}$ في صورة $جـ + د\sqrt{٥}$

ج استخدم إجابتك في الجزئية (ب) لتبسّط $(١ + \sqrt{٥})^{٣} + (١ - \sqrt{٥})^{٣}$

٦) أوجِد مفكوك $(١ + س)(٢ + ٣س)^{٤}$

٧) أوجِد مفكوك $(س^{٢} - ١)^{٤}$

٨) أوجِد أول ثلاثة حدود مرتبة ترتيبًا تصاعديًّا بحسب قوى المتغيّر ص في مفكوك $(١ + ص)^{٤}$

٨-٤ب مفكوك ذات الحدَّين

يمكن استخدام مثلث باسكال لإيجاد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب، ولكن إذا كان ن عددًا كبيرًا، فإنه يستغرق وقتًا أطول لكتابة جميع الصفوف في المثلث؛ وعليه نحتاج إلى طريقة أكثر فاعلية لنجد المعاملات في المفكوك.

استكشف ٤

لديك مفكوك العبارة الجبرية:

$(١ + س)^{٥} = ١ + ٥س + ١٠س^{٢} + ١٠س^{٣} + ٥س^{٤} + س^{٥}$

المعاملات هي ١ ، ٥ ، ١٠، ١٠ ، ٥ ، ١

١) أوجد قيمة:

$\binom{٥}{٠}$ ، $\binom{٥}{١}$ ، $\binom{٥}{٢}$ ، $\binom{٥}{٣}$ ، $\binom{٥}{٤}$ ، $\binom{٥}{٥}$

٢) ماذا تلاحظ من إجابتك عن السؤال (١)؟

٣) أكمل العبارات الآتية:

معامل $س^{٢}$ في مفكوك $(١ + س)^{٥}$ هو $\binom{٥}{...}$

معامل $س^{ر}$ في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هو $\binom{...}{...}$

معامل الحدّ الرابع في مفكوك $(١ + س)^{٥}$ هو $\binom{٥}{...}$

معامل الحدّ (ر + ١) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ هو $\binom{...}{...}$

مُساعَدة

لتجد $\binom{٥}{٢}$ على الآلة الحاسبة، اضغط على المفاتيح $\boxed{2}\ \boxed{nCr}\ \boxed{5}$

نكتب مفكوك ذات الحدَّين $(١ + س)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب كالآتي:

نتيجة ٧

$(١ + س)^{ن} = \binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١}س + \binom{ن}{٢}س^{٢} + ... + \binom{ن}{ن}س^{ن}$، $\forall$ ن عدد صحيح موجب.

مفكوك $(أ + ب)^{٥}$ يساوي:

$$(أ + ب)^{٥} = \binom{٥}{٠}أ^{٥} + \binom{٥}{١}أ^{٤}ب + \binom{٥}{٢}أ^{٣}ب^{٢} + \binom{٥}{٣}أ^{٢}ب^{٣} + \binom{٥}{٤}أب^{٤} + \binom{٥}{٥}ب^{٥}$$

ويمكن كتابة ذلك بصورة عامة على النحو:

$$(أ + ب)^{ن} = \binom{ن}{٠}أ^{ن} + \binom{ن}{١}أ^{(ن - ١)}ب + \binom{ن}{٢}أ^{(ن - ٢)}ب^{٢} + \binom{ن}{٣}أ^{(ن - ٣)}ب^{٣} + ... + \binom{ن}{ن}ب^{ن}$$

ويعرف هذا المفكوك بـ **نظرية ذات الحدَّين** **Binomial theorem** كما هو موضح في النتيجة الآتية:

نتيجة ٨

تنص نظرية ذات الحدّين على أنها:

$$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{١}\text{أ}^{(\text{ن}-١)}\text{ب} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{أ}^{(\text{ن}-٢)}\text{ب}^{٢} + \binom{\text{ن}}{٣}\text{أ}^{(\text{ن}-٣)}\text{ب}^{٣} + \dots + \text{ب}^{\text{ن}}$$

حيث ن عدد صحيح موجب

مُساعَدة

يمكن أن نستخدم نظرية ذات الحدَّين لفكّ $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ أيضًا.

يمكن أن نكتب:

$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}\left(١ + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}}$

(حيث أ $\neq$ ٠).

مثال ١٧

استخدم نظرية ذات الحدَّين لإيجاد مفكوك كلّ مما يأتي:

أ $(١ + ٢\text{س})^{٥}$ **ب** $(\text{س} - ٣)^{٤}$

الحلّ:

أ $(١ + ٢\text{س})^{٥} = \binom{٥}{٠} + \binom{٥}{١}(٢\text{س}) + \binom{٥}{٢}(٢\text{س})^{٢} + \binom{٥}{٣}(٢\text{س})^{٣} + \binom{٥}{٤}(٢\text{س})^{٤} + \binom{٥}{٥}(٢\text{س})^{٥}$

$= ١ + ٥ \times ٢\,\text{س} + ١٠ \times ٤\,\text{س}^{٢} + ١٠ \times ٨\,\text{س}^{٣} + ٥ \times ١٦\,\text{س}^{٤} + ١ \times ٣٢\,\text{س}^{٥}$

$= ١ + ١٠\,\text{س} + ٤٠\,\text{س}^{٢} + ٨٠\,\text{س}^{٣} + ٨٠\,\text{س}^{٤} + ٣٢\,\text{س}^{٥}$

ب $(\text{س} - ٣)^{٤} = \binom{٤}{٠}(\text{س})^{٤} + \binom{٤}{١}(\text{س})^{٣}(-٣) + \binom{٤}{٢}(\text{س})^{٢}(-٣)^{٢} + \binom{٤}{٣}(\text{س})(-٣)^{٣} + \binom{٤}{٤}(-٣)^{٤}$

$= \text{س}^{٤} + ٤\,\text{س}^{٣}(-٣) + ٦\,\text{س}^{٢}(٩) + ٤\,\text{س}(-٢٧) + ٨١$

$= \text{س}^{٤} - ١٢\text{س}^{٣} + ٥٤\text{س}^{٢} - ١٠٨\text{س} + ٨١$

مثال ١٨

أوجِد أول أربعة حدود في كل مفكوك فيما يأتي مرتّبة بقوى س التصاعدية:

أ $(١ + \text{س})^{١٥}$ **ب** $(٢ - ٣\,\text{س})^{١٠}$

الحلّ:

أ $(١ + \text{س})^{١٥} = \binom{١٥}{٠} + \binom{١٥}{١}\text{س} + \binom{١٥}{٢}\text{س}^{٢} + \binom{١٥}{٣}\text{س}^{٣} + \dots$

$= ١ + ١٥\,\text{س} + ١٠٥\,\text{س}^{٢} + ٤٥٥\,\text{س}^{٣} + \dots$

ب $(٢ - ٣\,\text{س})^{١٠} = \binom{١٠}{٠}٢^{١٠} + \binom{١٠}{١}٢^{٩}(-٣\text{س})^{١} + \binom{١٠}{٢}٢^{٨}(-٣\text{س})^{٢} + \binom{١٠}{٣}٢^{٧}(-٣\text{س})^{٣} + \dots$

$= ١٠٢٤ - ١٥٣٦٠\,\text{س} + ١٠٣٦٨٠\,\text{س}^{٢} - ٤١٤٧٢٠\,\text{س}^{٣} + \dots$

تمارين ٨-٤ب

١) اكتب كل صفّ من صفوف مثلث باسكال الآتية مستخدمًا صيغة التوافيق عندما:

أ $ن = ٣$ ب $ن = ٤$ ج $ن = ٥$

٢) استخدم الحد العام لنظرية ذات الحدَّين لتجد مفكوك كلّ ممّا يأتي:

أ $(١ + س)^{٤}$ ب $(١ - س)^{٥}$ ج $(١ + ٢س)^{٤}$ د $(٣ + س)^{٣}$

هـ $(س + ص)^{٤}$ و $(٢ - س)^{٥}$ ز $(أ - ٢ب)^{٤}$ ح $(٢س + ٣ص)^{٤}$

ط $\left(\frac{١}{٢}س - ٣\right)^{٤}$ ي $\left(١ - \frac{س}{١٠}\right)^{٥}$ ك $\left(س - \frac{٣}{س}\right)^{٥}$ ل $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س^{٢}}\right)^{٦}$

٣) استخدم نظرية ذات الحدَّين لتجد أول ثلاثة حدود في كلّ ممّا يأتي:

أ $(١ + س)^{١٠}$ ب $(١ + ٢س)^{٨}$ ج $(١ - ٣س)^{٧}$ د $(٣ + ٢س)^{٦}$

هـ $(٣ - س)^{٩}$ و $\left(٢ + \frac{١}{٢}س\right)^{٨}$ ز $(٥ - س^{٢})^{٩}$ ح $(٤س - ٥ص)^{١٠}$

٨-٤ج الحد العام في مفكوك ذات الحدَّين

الحد العام في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

يساعدنا الحد العام في إيجاد أي حد في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ دون الحاجة إلى إيجاد المفكوك كاملًا، كما يظهر في النتيجة الآتية:

نتيجة ٩

$ح_{(ر + ١)} = \binom{ن}{ر} أ^{(ن - ر)} ب^{ر}$، حيث ن، ر أعداد صحيحة موجبة، $٠ \leqslant ر \leqslant ن$.

مثال ١٩

أ استخدم مثلث باسكال لتجد مفكوك $(١ - ٢س)^{٥}$

ب أوجِد معامل $س^{٣}$ في مفكوك $(٣ + ٥س)(١ - ٢س)^{٥}$

الحــلّ:

أ $(١ - ٢س)^{٥}$

استخدم الصف عندما ن = ٥ في مثلث باسكال
(١، ٥، ١٠، ١٠، ٥، ١)

$(١ - ٢س)^{٥} = ١(١)^{٥} + ٥(١)^{٤}(-٢س) + ١٠(١)^{٣}(-٢س)^{٢} + ١٠(١)^{٢}(-٢س)^{٣} + ٥(١)(-٢س)^{٤} + ١(-٢س)^{٥}$

$= ١ - ١٠س + ٤٠س^{٢} - ٨٠س^{٣} + ٨٠س^{٤} - ٣٢س^{٥}$

ب $(٣ + ٥س)(١ - ٢س)^{٥} = (٣ + ٥س)(١ - ١٠س + ٤٠س^{٢} - ٨٠س^{٣} + ٨٠س^{٤} - ٣٢س^{٥})$

الحدّ الذي يحتوي على $س^{٣}$ ينتج من ناتج ضرب:

$(٣ + ٥س)(١ - ١٠س + ٤٠س^{٢} - ٨٠س^{٣} + ٨٠س^{٤} - ٣٢س^{٥})$

$٣ \times (-٨٠س^{٣}) = -٢٤٠س^{٣}$ و $٥س \times ٤٠س^{٢} = ٢٠٠س^{٣}$

معامل $س^{٣} = -٢٤٠ + ٢٠٠ = -٤٠$

مثــال ٢٠

أوجِد الحدّ الخالي من س في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٩}$

الحــلّ:

طريقة ١:

$$\left(\text{س} + \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٩} = \binom{٩}{٠}\text{س}^{٩} + \binom{٩}{١}\text{س}^{٨}\left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{١} + \binom{٩}{٢}\text{س}^{٧}\left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢} + \binom{٩}{٣}\text{س}^{٦}\left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٣} + \dots$$

الحدّ الخالي من س هو الحدّ الذي لا يحتوي على س بعد التبسيط.

حدود س تلغي بعضها عندما تكون قوى س ضعف قوى $\frac{٥}{\text{س}^{٢}}$ ويكون مجموع القوّتَين يساوي ٩

وعليه، فإننا نبحث عن القوّتَين ٦، ٣ على التوالي والمعامل المناظر في ذات الحدّين هو $\binom{٩}{٣}$.

الحدّ الخالي من س هو:

$$\binom{٩}{٣}\text{س}^{٦}\left(\frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)^{٣} = ٨٤ \times \text{س}^{٦} \times \frac{١٢٥}{\text{س}^{٦}} = ١٠٥٠٠$$

طريقة بديلة:

باستخدام قانون الحد العام:

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = \binom{٩}{\text{ر}}(\text{س})^{(٩-\text{ر})}(٥\text{س}^{-٢})^{\text{ر}}$$

$$= \binom{٩}{\text{ر}} \times \text{س}^{(٩-\text{ر})} \times ٥^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٢\text{ر}}$$

$$= \binom{٩}{\text{ر}} \times ٥^{\text{ر}} \times \text{س}^{(٩-٣\text{ر})}$$

لإيجاد الحدّ الخالي من س نضع:

$$\text{س}^{٠} = \text{س}^{(٩-٣\text{ر})}$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣\text{ر} \Leftarrow \therefore \text{ر} = ٣$$

$\therefore$ الحد الخالي من س هو:

$$\text{ح}_{٣+١} = \text{ح}_{٤} = \binom{٩}{٣} \times ٥^{٣} = ١٠٥٠٠$$

مُساعَدة

الحد الثابت في مفكوك ذات الحدين هو نفسه الحد الخالي من س.

مثـــال ٢١

إذا علمت أن معامل $س^{٥}$ في مفكوك $(٢ + ك\,س)^{٨}$ ضعف معامل $س^{٤}$، فأوجد قيمة ك حيث ك $>$ ٠

الحــلّ:

الحدّ الذي يتضمّن $س^{٥}$ هو $ح_{(٥+١)} = \binom{٨}{٥}(٢)^{٣}(ك\,س)^{٥} = ٤٤٨\,ك^{٥}س^{٥}$

الحدّ الذي يتضمّن $س^{٤}$ هو $ح_{(٤+١)} = \binom{٨}{٤}(٢)^{٤}(ك\,س)^{٤} = ١١٢٠\,ك^{٤}س^{٤}$

معامل $س^{٥}$ = ٢ × معامل $س^{٤}$

$٤٤٨\,ك^{٥} = ٢ \times ١١٢٠\,ك^{٤}$

$٤٤٨\,ك^{٥} - ٢٢٤٠\,ك^{٤} = ٠$

$٤٤٨\,ك^{٤}(ك - ٥) = ٠$

ك = ٠ أو ك = ٥

$\because$ ك $>$ ٠ ، $\therefore$ ك = ٥

طريقة بديلة:

باستخدام قانون الحد العام:

$ح_{ر+١} = \binom{٨}{ر}(٢)^{(٨-ر)}(ك\,س)^{ر}$

$= \binom{٨}{ر} \times (٢)^{(٨-ر)}(ك)^{ر}(س)^{ر}$

$\therefore س^{٥} = س^{ر} \Leftarrow ر = ٥$

$\therefore$ معامل $س^{٥} = \binom{٨}{٥} \times (٢)^{٣}(ك)^{٥}$

$= ٤٤٨ك^{٥}$

بالطريقة نفسها نستنتج معامل $س^{٤} = ١١٢٠\,ك^{٤}$

معامل $س^{٥}$ = ٢ × معامل $س^{٤}$

$٤٤٨\,ك^{٥} = ٢ \times ١١٢٠\,ك^{٤}$

$٤٤٨\,ك^{٥} - ٢٢٤٠\,ك^{٤} = ٠$

$٤٤٨\,ك^{٤}\,(ك - ٥) = ٠$

ك = ٠ أو ك = ٥

$\because$ ك $>$ ٠ $\therefore$ ك = ٥

تمارين ٨-٤ج

١) أوجِد معامل $س^{٣}$ لمفكوك كلّ مما يأتي:

أ $(١ - س)^{٩}$ ب $(١ + ٣س)^{١٢}$ ج $\left(٢ + \frac{س}{٤}\right)^{٧}$ د $\left(٣ - \frac{س}{٣}\right)^{١٠}$

٢) أوجِد معامل $س^{٤}$ في مفكوك $(٢س + ١)^{١٢}$

٣) أوجِد الحدّ الذي يتضمّن $س^{٥}$ في مفكوك $(٥ - ٢س)^{٨}$

٤) أوجِد معامل $س^{٨}$ $ص^{٥}$ في مفكوك $(س - ٢ص)^{١٣}$

٥) أوجِد الحدّ الخالي من س في مفكوك $\left(س - \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{١٢}$

٦) أوجِد أول ثلاثة حدود مرتّبة ترتيبًا تصاعديًّا بحسب قوى س في مفكوك كل ممّا يأتي:

أ $(١ - س)(٢ + س)^{٧}$ ب $(١ + ٢س)(١ - ٣س)^{١٠}$ ج $(١ + س)\left(١ - \frac{س}{٢}\right)^{٨}$

٧) أ أوجِد أول ثلاثة حدود مرتّبة ترتيبًا تصاعديًّا بحسب قوى س في مفكوك $(٢ + س)^{١٠}$

ب استبدل س بـ $(٢ص - ٣ص^{٢})$، وأوجِد أول ثلاثة حدود في المفكوك $(٢ + ٢ص - ٣ص^{٢})^{١٠}$

٨) أ أوجِد أول ثلاثة حدود مرتّبة ترتيبًا تصاعديًّا بحسب قوى س في مفكوك $\left(١ - \frac{س}{٢}\right)^{٨}$

ب أوجِد معامل $س^{٢}$ في مفكوك $(٢ + ٣س - س^{٢})\left(١ - \frac{س}{٢}\right)^{٨}$

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١، لكل عدد صحيح ن > ٠
- ٠! = ١
- التباديل طريقة لاختيار عناصر وترتيبها بشكل معيّن.
- التوافيق طريقة لاختيار عناصر علمًا بأن الترتيب غير مهم.
- ∀ ن عنصرًا مختلفًا يكون:

$$ل^{ن}_{ن} = ن!$$

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

- عدد تباديل ن من العناصر تحوي ر من العناصر المتشابهة فيما بينها، م من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها، هـ من العناصر الأخرى المتشابهة فيما بينها ... وهكذا يساوي:

$$\frac{ل^{ن}_{ن}}{ر! \times م! \times هـ! \times \ldots} = \frac{ن!}{ر! \times م! \times هـ! \times \ldots}$$

- $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\ (ن - ر)!}$

مفكوك ذات الحدَّين

- يمكن كتابة مفكوك $(١ + س)^{ن}$ كالآتي:

$\binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١}س + \binom{ن}{٢}س^{٢} + \ldots + \binom{ن}{ن}س^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب

أو $(١ + س)^{ن} = ١ + ن س + \frac{ن(ن - ١)}{٢!}س^{٢} + \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)}{٣!}س^{٣} + \ldots + س^{ن}$

- تنص نظرية ذات الحدين على أن:

$(أ + ب)^{ن} = \binom{ن}{٠}أ^{ن} + \binom{ن}{١}أ^{(ن - ١)}ب^{١} + \binom{ن}{٢}أ^{(ن - ٢)}ب^{٢} + \ldots + \binom{ن}{ن}ب^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب

- الحد العام في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ هو:

$ح_{(ر + ١)} = \binom{ن}{ر}أ^{(ن - ر)}ب^{ر}$، حيث ن ، ر أعداد صحيحة موجبة ، $٠ \leqslant ر \leqslant ن$

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثامنة

١) تتضمن كلمة (**فيلادلفيا**) أحرف علّة. أوجِد عدد التباديل الممكنة لأحرفها التسعة إذا كان:

أ لا توجد قيود على الترتيب.

ب الترتيب يبدأ بأحد أحرف العلة.

٢) طُلب إلى ٥ إداريات و ٤ معلمات وطالبتين الوقوف في صف مستقيم. أوجِد الطرق التي يمكنهن الوقوف بها لتكون:

أ الطالبتان متباعدتَين.

ب جميع المعلمات متباعدات.

٣) أوجِد طرق ترتيب جميع أحرف كلمة (**السلسبيل**) بحيث تبدأ الكلمة وتنتهي بالحرف نفسه.

٤) يحتوي رف مكتبة على ٥ كتب طول كل منها ١٥ سم، و ٤ كتب طول كل منها ٢٠ سم، و ٣ كتب طول كل منها ٢٥ سم. أوجِد عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بحيث لا يكون أي من الكتب أقصر من الكتاب الذي على يمينه مباشرة.

★ **٥)** رُتبت حروف الكلمة (**فأَسقَيناكُموه**): وعددها ١١ حرفًا في صف مستقيم، فأوجِد:

أ عدد التباديل المختلفة إذا لم توجد قيود.

ب عدد التباديل المختلفة التي تبدأ وتنتهي بالحرف أ.

ج عدد التباديل المختلفة التي لا تكون فيها الأحرف الثلاثة (أ، ي، أ) متجاورة.

د إذا اختيرت ٤ أحرف من العلة، عدد التباديل المختلفة التي لا تتضمن الأحرف س، ق، ن، ك بل تتضمن حرفَي أ

٦) سُئل طالبان أن يجدا عدد الطرق التي يمكن فيها أن يزرعا شجرتَين كبيرتَين و٣ شجرات صغيرة في صف مستقيم. فكانت إجابة الطالب الأول ٥! = ١٢٠، وإجابة الطالب الثاني $\frac{٥!}{٢! \times ٣!} = ١٠$ من منهما إجابته صحيحة؟ اشرح الخطأ الذي وقع فيه الطالب الآخر.

٧) بكم طريقة مختلفة يمكنك تقسيم ١٥ طفلًا إلى ٣ مجموعات في كل منها ٥ أطفال بحيث:

أ لا توجد قيود.

ب اثنان من الأطفال أخوة وجب أن يكونا في المجموعة نفسها.

٨) يُراد اختيار ٥ أشخاص عشوائيًّا من مجموعة مكوّنة من ٩ أشخاص للعمل في جمعية. بكم طريقة مختلفة يمكن إجراء ذلك إذا رفض شخصان معينان العمل معًا في الجمعية؟

٩) أوجِد عدد الطرق التي يمكن أن يتقاسم فيها ٣ أولاد ١١ قطعة فواكه بحيث يأخذ كل ولد عددًا فرديًّا من قطع الفواكه.

١٠) كم عددًا زوجيًّا مكوّنًا من ٤ أرقام يمكن تكوينه من الأرقام ٠، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧ بحيث يستخدم كل رقم مرة واحدة فقط، إذا علمت أن منزلة الآحاد ليست صفرًا؟

١١) رُتّبت ٣ علب متماثلة من الماء الغازي، وعلبتا شاي أخضر متماثلتان، وعلبتا عصير برتقال متماثلتان في صف مستقيم، احسب عدد التباديل بحيث تكون:

أ العلبة الأولى والعلبة الأخيرة في الصف من النوع نفسه للمشروب.

ب علب الماء الغازي الـ ٣ متجاورة، وعلبتا الشاي الأخضر ليستا متجاورتَين.

١٢) أوجِد معامل $س^{٢}$ في مفكوك $\left(٢س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥}$

١٣) إذا كان معامل س يساوي معامل $س^{٢}$ في مفكوك $(أ + ٢س)^{٦}$، فأوجِد قيمة أ.

١٤) إذا كان معامل $س^{٢}$ في مفكوك $\left(١ - \frac{س}{أ}\right)\left(٥ + س\right)^{٦}$ يساوي صفرًا، فأوجِد قيمة أ.

١٥) أوجِد الحدّ الخالي من س في مفكوك $\left(٣س - \frac{٢}{س^{٥}}\right)^{٦}$

١٦) إذا كان معامل س في مفكوك $(٢ + أس)^{٧}$ هو -٢٢٤٠، فأوجِد معامل $س^{٢}$، حيث أ عدد ثابت.

١٧) أوجِد معامل $س^{٥}$ في مفكوك $\left(س^{٣} + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{٥}$

١٨) أوجِد الحدّ الخالي من س في مفكوك $\left(٣س^{٢} - \frac{١}{٢س^{٣}}\right)^{٥}$

١٩) أ أوجِد أول ثلاثة حدود في مفكوك $(س - ٣س^{٢})^{٨}$ مرتبة ترتيبًا تنازليًّا بحسب قوى س.

ب أوجِد معامل $س^{١٥}$ في مفكوك $(١ - س)(س - ٣س^{٢})^{٨}$

٢٠) أ أوجِد أول ثلاثة حدود في مفكوك $(١ + ل س)^{٨}$ مرتبة ترتيبًا تصاعديًّا بحسب قوى س.

ب أوجِد قيم ل الممكنة، إذا علمت أن معامل $س^{٢}$ في مفكوك $(١ - ٢س)(١ + ل س)^{٨}$ هو ٢٠٤

٢١) أ أوجِد أول ثلاثة حدود مرتبة ترتيبًا تصاعديًّا بحسب قوى س في مفكوك:

١) $(١ + ٢س)^{٥}$

٢) $(٣ - س)^{٥}$

ب أوجِد معامل $س^{٢}$ في مفكوك $\left((١ + ٢س)(٣ - س)\right)^{٥}$

الوحدة التاسعة

التوزيع الاحتمالي

Probability distributions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٩-١ تستخدم التباديل والتوافيق في إيجاد الاحتمالات.

٩-٢ تنشئ جدول التوزيع الاحتمالي المتعلق بموقف معيّن يتضمن متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (س).

٩-٣ تحسب التوقع ت(س)، والتباين $ع^{٢}$(س)، والانحراف المعياري ع(س) لمتغير عشوائي منفصل.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف العاشر، الوحدتان ١٠، ١٢	تحسب احتمال حدث بسيط وتكتبه بصورة كسر عادي، أو كسر عشري، أو نسبة مئوية.	١) كم مرة تتوقع أن يظهر الرقم ٦ على وجه حجر نرد منتظم رُمي ١٨٠ مرة؟
	تفهم مقياس الاحتمال بين ٠ و ١ وتستخدمه.	
	تفهم أن التكرار النسبي هو تقدير للاحتمال.	٢) ما احتمال أن يكون مجموع الرقمَين الظاهرَين على وجهَي حجرَي نرد منتظمَين يساوي ٤؟
	تحسب احتمال أحداث مركبة بسيطة باستخدام مخطط الفضاء الاحتمالي، ومخطط الشجرة حيث يكون مناسبًا.	
الصف التاسع، الوحدة ٩	تصِف العلاقات بين المجموعات، وتمثلها باستخدام اللغة والرموز ومخططات ڤن.	٣) إذا علمت أن ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}، ا = {١، ٢، ٥}، ب = {١، ٣، ٤، ٦}. فاستخدم مخطط ڤن لتجد ع(ا ∪ ب′)، ع(ا′ ∪ ب). حيث ع تمثل عدد العناصر.

المفردات

الاحتمالات probabilities

التوزيع الاحتمالي probability distribution

التوقع Expectation

المتغير العشوائي المنفصل Discrete random variable

لماذا ندرس التوزيع الاحتمالي؟

درست سابقًا التباديل والتوافيق، واستخدمتها لتحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار فريق ما أو لوضع عناصر في ترتيب معيّن.

في هذه الوحدة، سوف تقوم بتوسيع هذه الأفكار حتى تتمكن من حساب **احتمالات probabilities** وقوع أحداث مختلفة.

٩-١ استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات

درست سابقًا طرقًا مختلفة لحساب الاحتمالات، وفي هذا الدرس ستتعلم طرقًا أخرى لحسابها باستخدام التباديل والتوافيق كما هو مبيّن في نتيجة ١:

تذكير

من الوحدة ٨ نعرف أن ترتيب الاختيار في التباديل مهم، ولكنه غير مهم في التوافيق.

نتيجة ١

إذا كان حدث ما مكونًا من عدد من التباديل أو التوافيق المفضلة المتساوية الاحتمال، فإن احتمال وقوع الحدث يكون:

$$\text{ل(أ)} = \frac{\text{عدد التباديل المفضلة}}{\text{عدد التباديل الممكنة}}$$ ، حيث أ الحدث المفضل.

أو

$$\text{ل(ب)} = \frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}}$$ ، حيث ب الحدث المفضل.

مثال ١

على رفّ ١٥ علبة لم يوضع اسم المحتوى لأيّ منها، لكن نعرف أن ٨ منها تحتوي على حساء، و٤ منها تحتوي على فاصولياء، و٣ تحتوي على بازلاء.

إذا اختيرت ٧ علب عشوائيًا بدون إعادة، فأوجد احتمال أن يكون ٥ منها تحتوي على الحساء.

الحـلّ:

ليكن أ هو حدث اختيار ٥ علب حساء من ٧ علب.

الاختيارات المفضلة هي ٥ علب حساء، و٢ لا تحتويان على الحساء.

عدد التوافيق المفضلة: $\binom{٨}{٥} \times \binom{٧}{٢}$ اختيار ٥ علب من بين ٨ علب من الحساء، واختيار علبتيَن من الأنواع الأخرى.

عدد التوافيق الممكنة: $\binom{١٥}{٧}$ اختيار ٧ علب من ١٥ علبة.

$$\text{ل(أ)} = \frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}} = \frac{\binom{٨}{٥} \times \binom{٧}{٢}}{\binom{١٥}{٧}}$$

$$= \frac{٥٦ \times ٢١}{٦٤٣٥} = ٠,١٨٣$$ (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

مثـــال ٢

في علبة طعام لطالبة ١٣ حبة كرز أحمر، و٧ حبات كرز أسود. إذا أخذت الطالبة ٥ حبات كرز عشوائيًا، فأوجِد احتمال أن تكون قد أخذت كرزًا أحمر أكثر من الكرز الأسود.

الحــلّ:

ليكن أ هو حدث أخذ الكرز الأحمر أكثر من الكرز الأسود عند أخذ ٥ حبات كرز.

	من ١٣ حبة كرز أحمر	من ٧ حبات كرز أسود	عدد الطرق
	٥	٠	$\binom{١٣}{٥} \times \binom{٧}{٠} = ١٢٨٧$
أو	٤	١	$\binom{١٣}{٤} \times \binom{٧}{١} = ٥٠٠٥$
أو	٣	٢	$\binom{١٣}{٣} \times \binom{٧}{٢} = ٦٠٠٦$
			المجموع = ١٢٢٩٨

يبيّن الجدول حالات النواتج المفضلة ليكون عدد حبات الكرز الأحمر أكثر من عدد حبات الكرز الأسود، إضافة إلى عدد الطرق الممكنة لاختيارها.

عدد التوافيق الممكنة (عدد الطرق) = $\binom{٢٠}{٥}$ = ١٥٥٠٤ طريقة

اختيار ٥ حبات من ٢٠ حبة كرز.

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}} = \frac{\binom{١٣}{٥}\times\binom{٧}{٠} + \binom{١٣}{٤}\times\binom{٧}{١} + \binom{١٣}{٣}\times\binom{٧}{٢}}{\binom{٢٠}{٥}}$$

$$= \frac{١٢٢٩٨}{١٥٥٠٤} = ٠{,}٧٩٣$$ (لأقرب ٣ أرقام معنوية)

تذكير

تذكّر أن

ل (أ أو ب أو ج) =

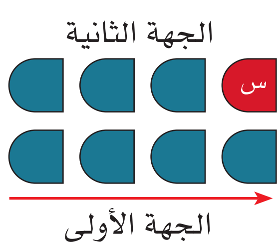
ل (أ ∪ ب ∪ ج) =

ل (أ) + ل (ب) + ل (ج)

للأحداث المتنافية.

مثـــال ٣

حافلة ركاب صغيرة تحتوي على مقعد للسائق (س) ومقاعد لسبعة ركاب كما هو مبيّن.



إذا جلس سبعة ركاب بترتيب عشوائي، فأوجد احتمال أن يجلس راكبان:

أ في الجهة نفسها من الحافلة.

ب في جهتين مختلفتَين من الحافلة.

الحــلّ:

أ هو حدث جلوس الراكبين في الجهة نفسها.

ب هو حدث جلوس الراكبين في جهتين مختلفتين.

أ هناك احتمالان مختلفان للنتيجة المفضلة:

$ل_٢^٣$ طريقة .... يجلس الراكبان في جهة السائق (الجهة الثانية).

$ل_٢^٤$ طريقة .... يجلس الراكبان في الجهة الأخرى من السائق (الجهة الأولى).

العدد الإجمالي للنواتج هو $ل_٢^٧$ طريقة ... يجلس الراكبان على أيّ مقعدَين من المقاعد السبعة.

ل(أ) = ل(يجلس الراكبان في جهة السائق) + ل(يجلس الراكبان في الجهة الأخرى من السائق).

$$= \frac{ل_٢^٣}{ل_٢^٧} + \frac{ل_٢^٤}{ل_٢^٧}$$

$$= \frac{٦}{٤٢} + \frac{١٢}{٤٢}$$

$$= \frac{٣}{٧}$$

ب $ل(ب) = \frac{ل_١^٣ \times ل_١^٤ + ل_١^٤ \times ل_١^٣}{ل_٢^٧}$

$$= \frac{١٢ + ١٢}{٤٢} = \frac{٢٤}{٤٢} = \frac{٤}{٧}$$

طريقة بديلة:

$ل(ب) = ١ - ل(أ) = ١ - \frac{٣}{٧} = \frac{٤}{٧}$ ...... الحدثان 'يجلسان في جهتين مختلفتين من الحافلة' و 'يجلسان في الجهة نفسها من الحافلة' متتامان.

تذكير

ل (أَ) = ١ - ل (أ) حيث أ، أَ حدثان متتامان.

تمارين ٩-١

١) اختير طفلان عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من ستة أولاد وأربع بنات. استخدم التوافيق لتجد احتمال أن يكون الطفلان:

أ ولدَين. ب بنتَين. ج بنتًا وولدًا.

٢) اختيرت أربع حبات موز عشوائيًا من صندوق يحتوي على ١٧ حبة موز صفراء اللون، و ٢٣ حبة موز خضراء اللون. أوجِد احتمال:

أ أن لا توجد حبات موز خضراء. ب أقل من نصف الحبات المختارة خضراء.

٣) يختار أمين أحد المعارض عشوائيًا، ثماني قطع للعرض من بين ٣٦ لوحة تشكيلية، ٤٤ لوحة فنية. أوجِد احتمال أن يتضمن العرض على الأقل ثلاث لوحات تشكيلية أكثر من اللوحات الفنية.

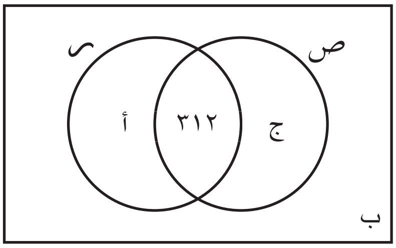
٤) في صندوق للأدوات الصناعية ٢٥ مفكًا، ١٦ رأس مثقاب، ٣٨ مفتاحًا، ١١ إزميلًا. أوجِد احتمال اختيار أربع أدوات ليس من بينها أيّ إزميل.

٥) يزرع حمد ٩ شُجيرات في حديقة منزله في صف واحد عشوائيًا: ٣ منها تزهر ورودًا حمراء، ٦ تزهر ورودًا صفراء. احسب احتمال أن:

- **أ** تقع شجيرة منها تزهر وردة صفراء في المنتصف.
- **ب** لا تكون الشجيرات الثلاث التي تزهر ورودًا حمراء متباعدة.
- **ج** لا تكون الشجيرتان اللتان تزهران ورودًا حمراء متجاورتَين.

٦) مجموعة من ١٨٠ شخصًا، تضم ٨٨ رجلًا تسعة منهم يستخدمون يدهم اليسرى للكتابة، وتضم أيضًا ٨٥ أنثى لا يستخدمن اليد اليسرى. إذا اختير ستة أشخاص من المجموعة عشوائيًا، فأوجِد احتمال أن يكون أربعة منهم يستخدمون اليد اليسرى أو إناثًا.

٧) في مكتبة صغيرة ١٢٤٠ كتابًا مقسمة إلى: ٤٧٨ رواية ويرمز إليها (ر)، منها ٣١٢ رواية مجلدة بغلاف صلب ويرمز إليها (ص)، ويوجد أيضًا ٤٤٠ كتابًا مجلدًا بغلاف غير صلب. بعض هذه المعلومات مبيّن على مخطط ڤن.



- **أ** أوجِد قيمة كلٍّ من: أ، ب، ج.
- **ب** اختير ٢٥ كتابًا عشوائيًا ليتم التبرع بها إلى جمعية خيرية، وتأمل الجمعية أن يكون من بينها على الأقل ٢٢ رواية أو كتابًا مجلدًا بغلاف صلب. احسب احتمال أن تحصل الجمعية الخيرية على ما تأمل.

٩-٢ المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)

عندما نشتري صندوق مانجو يتسع ٦ حبات، فقد يكون عددٌ منها فاسدًا، لذلك قد تأخذ عدد الحبات الفاسدة القيم ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

نلاحظ أن هذه القيم محددة وقابلة للعد، ويمكن أن نرمز إليها بالرمز (س)، حيث س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، كذلك على سبيل المثال، إذا رمينا أربعة أحجار نرد عادية فإن عدد مرات الحصول على العدد ٦ يمثل متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا نرمز إليه بالرمز (س)، حيث س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}.

مُساعَدة

إذا أمكن للمتغير (س) أن يأخذ قيمًا محددة، وقابلة للعد يسمى متغيرًا عشوائيًا منفصلًا.

تعطي المواقف التي يمكن اختيارها دون إعادة **متغيرات عشوائية منفصلة**. على سبيل المثال، إذا اخترنا عشوائيًا ثلاثة أطفال من مجموعة تتضمّن أربعة أولاد وبنتَين، عندها نسمي عدد الأولاد الذين تم اختيارهم متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا، ونرمز إليه (و)، حيث و ∈ {١، ٢، ٣}، وكذلك نسمي عدد البنات اللاتي تم اختيارهن متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا، ونرمز إليه (ب)، حيث ب ∈ {٠، ١، ٢}.

التوزيع الاحتمالي

التوزيع الاحتمالي probability distribution لمتغيّر عشوائي منفصل هو عرض جميع قيم المتغيّر العشوائي الممكنة مع الاحتمالات المناظرة لها، وطريقة العرض المعتادة هي جداول التوزيع الاحتمالي.

افترض أنك رميت قطعتَي نقد منتظمتَين، فيكون عدد الصور التي يمكن الحصول عليها هو ٠، ١، ٢

وبالتالي يكون عدد الصور الناتجة تمثل متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا نرمز إليه بالرمز (س)، حيث س ∈ {٠، ١، ٢}.

ل(س = ٠) = ل(كتابة و كتابة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

ل(س = ١) = ل(صورة و كتابة) + ل(كتابة و صورة) = (٠,٥ × ٠,٥) + (٠,٥ × ٠,٥) = ٠,٥

ل(س = ٢) = ل(صورة و صورة) = ٠,٥ × ٠,٥ = ٠,٢٥

مُساعَدة

النواتج الممكنة لتجربة رمي قطعتَي نقد معدنية منتظمتين هي:
(صورة ، صورة)
(صورة ، كتابة)
(كتابة ، صورة)
(كتابة ، كتابة)

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س):

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٢٥	٠,٥	٠,٢٥

احتمالات قيم المتغيّر (س) الممكنة تساوي التكرارات النسبية للقيم. نتوقع أن ٢٥٪ من النتائج تعطي صفر صورة، ٥٠٪ يكون الناتج صورة واحدة، ٢٥٪ يكون الناتج صورتَين.

نتيجة ٢

التوزيع الاحتمالي يبيّن جميع قيم المتغير العشوائي المنفصل (س) الممكنة، وأن مجموع الاحتمالات Σ ل(س) = ١

مثــال ٤

تم تدوير القرص المقابل مرتين.

عرّف المتغير العشوائي (س) على أنه مجموع الرقمين اللذين يقف عندهما المؤشر.

أ كوّن مخطط الفضاء الاحتمالي للمتغير (س).

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س).

مُساعَدة

ل(س) هو التكرار النسبي لكل قيمة من قيم المتغيّر العشوائي (س).

الحــلّ:

أ

		الدوران الأول			
		١	٢	٣	٤
الدوران الثاني	١	٢	٣	٤	٥
	٢	٣	٤	٥	٦
	٣	٤	٥	٦	٧
	٤	٥	٦	٧	٨

تبيّن شبكة المربعات ١٦ ناتجًا محتملًا لها فرصة الحدوث نفسها للمتغير العشوائي المنفصل (س)، حيث س ∋ {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}.

مُساعَدة

لاحظ أن: $\sum$ ل(س) = ١

ب

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	المجموع = ١

يبيّن الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

مثــال ٥

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ف):

ف	٢	٣	٤	٥	٦
ل(ف)	٠,٠٥	$ج^٢$	ج + ٠,١	٢ج + ٠,٠٥	٠,١٦

يمكن الحل بطريقة أخرى وهي إيجاد ١ − ل (ف ≤ ٤)

أوجِد:

أ قيمة الثابت ج

ب ل(ف > ٤) .

الحــلّ:

أ ٠,٠٥+ $ج^٢$ + ج + ٠,١ + ٢ج + ٠,٠٥ + ٠,١٦ = ١

$ج^٢$ +٣ ج − ٠,٦٤ = ٠

(ج − ٠,٢)(ج + ٣,٢) = ٠

استخدم $\sum$ ل(ف) = ١، وحل المعادلة لتجد قيمة ج.

ج = ٠,٢ أو ج = −٣,٢ (مرفوضة)

الحل المقبول هو ج = ٠,٢

لاحظ أنه إذا كان ج = −٣,٢ فإن:

ل(ف = ٣) = ١٠,٢٤

ل(ف = ٤) = −٣,١

ل(ف = ٥) = −٦,٣٥

مُساعَدة

تحقق ممّا إذا كانت الحلول مقبولة. تذكّر أن الاحتمال ٠ ≤ ل (ف) ≤ ١

ب ل(ف > ٤) = ل(ف = ٥) + ل(ف = ٦)

= (٢ × ٠,٢) + ٠,٠٥ + ٠,١٦

= ٠,٦١

مُساعَدة

يمكن الحل بطريقة أخرى وهي إيجاد ١ − ل (ف ≤ ٤)

مثـــال ٦

يرغب ثمانية يافعين، ورجل واحد، وامرأة واحدة في ركوب حافلة، حيث توجد ٣ مقاعد شاغرة.

قرر السائق اختيار ٣ منهم عشوائيًا للصعود إلى الحافلة.

أنشئ جدول توزيع احتمالي للمتغيّر (ص) الذي يمثل 'عدد اليافعين المختارين'.

الحـــلّ:

الاختيار تمّ دون إعادة، وهذا يعطي متغيرًا عشوائيًا منفصلًا، ولأن الترتيب هنا غير مهم، لذا نستخدم التوافيق لنجد ل(ص).

قيم المتغيّر (ص) الممكنة هي ١، ٢، ٣

على الأقل سيتم اختيار واحد من اليافعين لأنه يوجد فقط اثنان من غير اليافعين.

عدد النواتج الممكنة: $\binom{١٠}{٣}$

اختيار ثلاثة من ١٠ أشخاص.

$$ل(ص = ١) = \frac{\binom{٨}{١} \times \binom{٢}{٢}}{\binom{١٠}{٣}} = \frac{١}{١٥}$$

اختيار واحد من ٨ يافعين (ص)، واثنَين من غير اليافعين.

$$ل(ص = ٢) = \frac{\binom{٨}{٢} \times \binom{٢}{١}}{\binom{١٠}{٣}} = \frac{٧}{١٥}$$

اختيار اثنَين من ٨ يافعين (ص)، وواحد من غير اليافعين.

$$ل(ص = ٣) = \frac{\binom{٨}{٣} \times \binom{٢}{٠}}{\binom{١٠}{٣}} = \frac{٧}{١٥}$$

اختيار ثلاثة من ٨ يافعين (ص)، ولم يتم اختيار أحد من غير اليافعين.

ص	١	٢	٣
ل(ص)	$\frac{١}{١٥}$	$\frac{٧}{١٥}$	$\frac{٧}{١٥}$

يمثل الجدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (ص).

تمارين ٩-٢

١) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س):

س	٢	٣	٤	٥
ل (س)	ب	٢ب	$\frac{١}{٢}$ب	٣ب

أ أوجِد قيمة ب.

ب احسب ل(٢ < س < ٥).

٢) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ح):

ح	٣	٦	٩	١٢	١٥
ل (ح)	٢ك	$ك^٢$	$\frac{ك}{٢}$	$\frac{٤}{٥}$ − ٣ك	$\frac{١٣}{٥٠}$

أ اكتب معادلة بدلالة **ك**، ثم حلها.

ب لماذا حلّ واحد فقط من حلولك مقبول؟ اشرح إجابتك.

ج أوجِد ل (٦ ⩽ ح < ١٠).

٣) في مباراة كرة السلة احتمال أن ينجح غانم في تسجيل كل هدف يساوي $\frac{٧}{٩}$، إذا نفّذ محاولتَين، حيث المتغيّر العشوائي المنفصل (س) يمثل 'عدد مرات تسجيل هدف'.

أ بيّن أن ل(س = ٠) = $\frac{٤}{٨١}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

٤) رُمي حجر نرد منتظم مرتَين له ٤ أوجه مرقمة بالأرقام ١، ٢، ٣، ٥، إذا عرف المتغيّر العشوائي (س) بأنه مجموع العددَين الظاهرَين على وجهَي الحجرَين.

أ بيّن أن ل (س = ٨) = $\frac{١}{٨}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)، ثم أوجِد ل (س < ٦).

٥) (ق) متغيّر عشوائي منفصل، حيث ق ∈ {٣، ٤، ٥، ٦}.

أ إذا علمت أن ل (ق) = ج$ق^٢$، فأوجِد قيمة العدد الثابت ج.

ب أوجِد ل (ق < ٤).

٦) اختير أربعة كتب عشوائيًا من صندوق يحتوي على ١٠ روايات، ١٠ مراجع، ٥ قواميس. يمثل المتغيّر العشوائي (ن) عدد الروايات التي تمّ اختيارها.

أ أوجِد قيمة ل(ن = ٢) لأقرب ثلاثة أرقام معنوية.

ب حدّد أيّهما أكثر إمكانية للحدوث ن = ٠ أم ن = ٤، وبرّر إجابتك.

٧) في لعبة تدوير قرص منتظم له أربعة أجزاء مرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢، ٣، إذا دوّر لاعب القرص وظهر العدد ١ أو ٢ أو ٣، فتكون هي درجته. وإذا ظهر العدد (٠) عندها يدوّر اللاعب قرصًا منتظمًا، أجزاؤه الثلاثة مرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢ وتكون درجته هي العدد الذي يظهر نتيجة التدوير. المتغيّر (س) يمثل درجة اللاعب.

أ بيّن أن ل (س = ٠) = $\frac{١}{١٢}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)، ثم أوجِد احتمال أن تكون قيمة س عددًا أوليًا.

٨) المتغيّر العشوائي المنفصل (ر)، حيث ر $\in$ {١، ٣، ٥، ٧}.

أ إذا علمت أن ل (ر) = $\frac{ك(ر + ١)}{ر + ٢}$ ، فأوجِد قيمة العدد الثابت ك.

ب أوجِد ل (ر $\geqslant$ ٤).

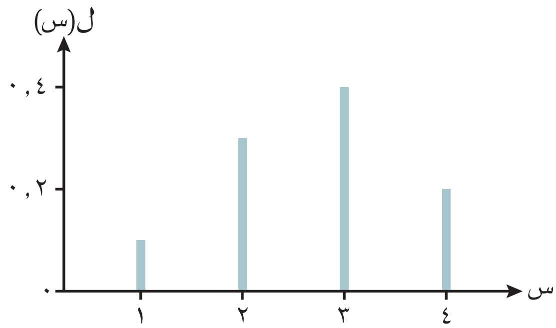
٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

قيم المتغيّر العشوائي المنفصل ذو الاحتمالات المرتفعة يتوقع حدوثها أكثر من تلك التي قيم احتمالاتها منخفضة، وكذلك عندما يُجرى عدد من التجارب فإنه ينتج توزيع تكراري للقيم له وسط حسابي (قيمة متوقعة).

القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي)

يطلق على الوسط الحسابي للمتغيّر العشوائي المنفصل (س) بالقيمة المتوقعة، ويرمز إليه بـ ت(س). افترض أن لديك قرصًا دوّارًا غير منتظم مرقمًا بالأرقام ١، ٢، ٣، ٤ وكانت احتمالات قيم (س) معطاة في الجدول وممثلة بيانيًا كالآتي:

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢



بغضّ النظر عن عدد دورات القرص، فإننا يمكن أن نتوقع النتيجة ١ في ١٠٪ من الدورات، والنتيجة ٢ في ٣٠٪ منها، والنتيجة ٣ في ٤٠٪ منها، والنتيجة ٤ في ٢٠٪.

التكرارات المتوقعة للدرجات من ١٦٠٠ تجربة مبيّنة في الجدول الآتي:

س	١	٢	٣	٤
التكرار المتوقع (ك)	٠,١ × ١٦٠٠ = ١٦٠	٠,٣ × ١٦٠٠ = ٤٨٠	٠,٤ × ١٦٠٠ = ٦٤٠	٠,٢ × ١٦٠٠ = ٣٢٠

مُساعَدة
يمكننا التفكير في القيمة المتوقعة ت(س) على أنها المتوسط لقيم (س) بعد إجراء عدد كبير من المحاولات.

من جدول التكرار المتوقع يمكنك أن تحسب الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) للدرجات بعد ١٦٠٠ تجربة.

الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) = ت(س) = $\frac{\sum س ك}{\sum ك}$

$= \frac{(١ \times ١٦٠) + (٢ \times ٤٨٠) + (٣ \times ٦٤٠) + (٤ \times ٣٢٠)}{١٦٠٠} = ٢,٧$

نحصل على القيمة نفسها للقيمة المتوقعة ت(س) إذا استخدمت التكرارات النسبية (الاحتمالات) بدلًا من التكرارات.

مُساعَدة
لاحظ أن:
$\sum$ل(س) = ١

الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) = ت(س) = $\frac{\sum س\ ل(س)}{\sum ل(س)}$

$= \frac{(١ \times ٠,١) + (٢ \times ٠,٣) + (٣ \times ٠,٤) + (٤ \times ٠,٢)}{١} = ٢,٧$

نتيجة ٣

القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي منفصل (س) هي: ت (س) = $\sum$ س ل (س)،
حيث ٠ $\leqslant$ ل (س) $\leqslant$ ١

استكشف ١

لدى كل من عدنان وبدر حقيبة تحتوي على ٥ بطاقات مرقمة بالأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥

اختار كل منهما في الوقت نفسه بطاقة من حقيبته عشوائيًا، ووضعها مفتوحة على الطاولة. المتغيّر العشوائي (س) هو الفرق المطلق بين الأعداد الظاهرة على بطاقتَيهما، فيكون س $\in$ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}. كرّرا التجربة ٢٠٠ مرة، واستخدما النتائج لإنشاء جدول توزيع تكراري للمتغيّر (س).

اقترح عدنان تجربة أخرى لها المسار السابق نفسه، فضلًا عن أن كلًا من عدنان وبدر يمكنه اختيار البطاقة التي يريد وضعها على الطاولة، ولا يمكنه رؤية بطاقة الآخر. يقول عدنان إن التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س) سيكون مختلفًا لأن البطاقتَين لم يتم اختيارهما عشوائيًا. لم يوافق بدر على ما قاله عدنان، ويقول إن التوزيع سيكون مشابهًا جدًا، أو قد يكون هو نفسه بالضبط.

هل تتفق مع عدنان أم مع بدر؟ برر إجابتك.

التباين

التباين والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي منفصل هما مقياسان لانتشار القيم حول الوسط الحسابي (ت (س))، يمكن حساب هذَين المقياسَين كما قمنا بإيجاد القيمة المتوقعة بدلالة الاحتمالات بدلًا من التكرارات.

إذا اعتمدنا ل(س) بدلًا من ك (التكرار)، و ت (س) بدلًا من $\bar{س}$ في صيغة التباين

$$\frac{\sum س^{٢} ك}{\sum ك} - \bar{س}^{٢}$$

فنحصل على $\frac{\sum س^{٢} ل (س)}{\sum ل (س)} - (ت (س))^{٢}$، ويمكن تبسيطها إلى $\sum$ س^{٢} ل (س) − (ت (س))^{٢}

لأن $\sum$ ل (س) = ١

نتيجة ٤

تباين المتغيّر العشوائي المنفصل (س) هو ع^{٢}(س) = $\sum$ (س^{٢} ل (س)) − (ت (س))^{٢} حيث ت (س) التوقع للمتغير العشوائي (الوسط الحسابي).

تذكير

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

ملاحظة: يمكنك أيضًا حساب التباين لمتغيّر عشوائي منفصل (س) باستخدام القانون:

ع^{٢}(س) = $\sum$ (س − ت (س))^{٢} × ل (س).

مثــال ٧

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س). أوجِد القيمة المتوقعة، والتباين، والانحراف المعياري للمتغيّر (س):

س	٠	٥	١٥	٢٠
ل (س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$

الحــلّ:

$ت(س) = \left(٠ \times \frac{١}{١٢}\right) + \left(٥ \times \frac{٣}{١٢}\right) + \left(١٥ \times \frac{٥}{١٢}\right) + \left(٢٠ \times \frac{٣}{١٢}\right)$

عوّض قيم س، ل (س) في الصيغة ت (س) = $\sum$(س ل (س)).

$= \frac{١}{١٢} \times \left((٠ \times ١) + (٥ \times ٣) + (١٥ \times ٥) + (٢٠ \times ٣)\right)$

$= \frac{١}{١٢} \times ١٥٠$

$= ١٢,٥$

$ع^٢(س) = \left[\left(٠^٢ \times \frac{١}{١٢}\right) + \left(٥^٢ \times \frac{٣}{١٢}\right) + \left(١٥^٢ \times \frac{٥}{١٢}\right) + \left(٢٠^٢ \times \frac{٣}{١٢}\right)\right] - (١٢,٥)^٢$

عوّض في صيغة ع^٢ (س) لإيجاد التباين.

$= ٢٠٠ - ١٥٦,٢٥$

$= ٤٣,٧٥$

ع (س) = $\sqrt{٤٣,٧٥}$ = ٦,٦١ (لأقرب ٣ أرقام معنوية).

خذ الجذر التربيعي للتباين لإيجاد الانحراف المعياري.

تمارين ٩-٣

١) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ص):

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل (ص)	٠,٠٣	٢م	٠,٣٢	م	٠,٠٥

أ أوجِد قيمة م.

ب احسب كلًّا من: ت (ص)، ع^٢ (ص).

٢) (ح) متغيّر عشوائي حيث ح $\in$ {١، ٣، ٦، ١٠}. إذا علمت أن احتمالية حدوث قيم ح متساوية، فأوجِد ت (ح)، ع^٢ (ح).

٣) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ف):

ف	١	٣	٩	م
ل (ف)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا علمت أن ت (ف) = ٥,٣٨، فأوجد قيمة كلٍّ من: م، ع^{٢} (ف).

٤) (ر) متغيّر عشوائي، حيث ر ∈ {١٠، ٢٠، ٧٠، ١٠٠}. إذا علمت أن ل(ر) تتناسب مع قيم (ر)، فبيّن أن ت (ر) = ٧٧ ثم أوجد ع^{٢} (ر).

٥) رُمي حجرا نرد منتظمَين. المتغيّر العشوائي المنفصل (س) هو المضاعف المشترك الأصغر للعددَين الظاهرَين على حجرَي النرد.

أ أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س).

ب أوجِد ت (س)، ل (س > ت (س)).

ج احسب ع^{٢} (س).

٦) اختير طالبان عشوائيًا من صف جامعي يتألف من ١٢ طالبة و ١٨ طالبًا.

أ أوجِد القيمة المتوقعة لعدد الطالبات، والقيمة المتوقعة لعدد الطلاب.

ب اكتب نسبة القيمة المتوقعة لعدد الطالبات إلى القيمة المتوقعة لعدد الطلبة في أبسط صورة. ماذا تلاحظ على هذه النسبة؟

ج احسب التباين لعدد الطالبات المختارات.

٧) تحتوي سلة على ٨ بكرات قطن: ٤ منها خُضر، ٣ حُمر، واحدة صفراء. اختيرت ٣ بكرات قطن عشوائيًا من السلة.

أ بيّن أن القيمة المتوقعة للبكرة الصفراء هي ٠,٣٧٥

ب أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الحُمر.

ج أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر.

٨) رُمي حجر نرد، إذا ظهر على وجه حجر النرد عدد فردي يحصل اللاعب على درجة (س) تساوي ذلك العدد، وإذا ظهر عدد زوجي يُعيد اللاعب رمي حجر النرد:

- إذا ظهر عدد فردي في الرمية الثانية يحصل اللاعب على درجة تساوي ذلك العدد.
- إذا ظهر في الرمية الثانية عدد زوجي يحصل اللاعب على درجة تساوي نصف ذلك العدد الزوجي.

أ سجّل قيم (س) الممكنة، وأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي له.

ب أوجِد ل (س > ت (س)).

ج احسب قيمة ع^{٢} (س).

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يأخذ المتغيّر العشوائي المنفصل قيمًا محددة وقابلة للعد.
- التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المنفصل هو عرض لجميع القيم الممكنة، واحتمالاتها المناظرة.
- للمتغيّر العشوائي المنفصل (س)، حيث ٠ ⩽ ل(س) ⩽ ١ يكون:
  - ∑ل(س) = ١
  - ت(س) = ∑س ل(س)
  - ع^{٢}(س) = ∑س^{٢} ل(س) − (ت(س))^{٢}
  - ع(س) = $\sqrt{\text{ع}^{٢}\text{(س)}}$

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة التاسعة

١) أوجِد الوسط الحسابي، والتباين للمتغيّر العشوائي المنفصل (س) الذي توزيعه الاحتمالي مُعطى في الجدول الآتي:

س	١	٢	٣	٤
ل (س)	١ − ر	٢ − ٣ر	٣ − ٤ر	٤ − ٦ر

٢) يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (ص):

ص	١	١٠	م	١٠١
ل (ص)	٠,٢	٠,٤	٠,٢	٠,٢

أ إذا علمت أن ع^{٢}(ص) = ٢,١٣٨٥، فبيّن أن م^{٢} − ٦١م + ٦٢٤ = ٠، وحل المعادلة.

ب أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ ت (ص).

٣) يبيّن الجدول الآتي احتمالات نسب الربح المئوية المختلفة لاستثمارات شركة ما خلال ٣ سنوات:

نسبة الربح ٪	١	٥	١٠	١٥	٢٠	٣٠	٤٠	٤٥	٥٠
ل (ص)	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٥٠	٠,٢٠	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١

أ احسب الربح المتوقع على استثمار بقيمة ٥٠٠٠٠ ريال عُماني.

ب تستثمر امرأة مبلغ ٥٠٠٠٠ ريال عُماني مع الشركة، لكنها تتوقع أنها ستحقق ربحًا أكثر بالفترة الزمنية نفسها إذا وضعت نقودها في حساب ودائع يعطي فائدة مركبة ر٪ سنويًا. احسب لأقرب منزلتَين عشريتَين أقل قيمة ممكنة للفائدة (ر).

مُساعَدة

الفائدة المركبة ر٪ في السنة تعني ضرب المبلغ السابق في $١ + \frac{ر}{١٠٠}$.
لإيجاد القيمة الجديدة بعد ن سنة، يمكننا الضرب في $\left(١ + \frac{ر}{١٠٠}\right)^{ن}$.

الوحدة العاشرة

The binomial and geometric distributions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١٠-١ تتذكر صيغة الاحتمالات لتوزيع ذي الحدَّين وتستخدمها، وتتعرف على المواقف العملية التي يكون فيها التوزيع تمثيلًا مناسبًا.

١٠-٢ تحسب التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدَّين.

١٠-٣ تتذكر صيغة الاحتمالات للتوزيع الهندسي وتستخدمها، وتتعرف على المواقف العملية التي يكون فيها التوزيع تمثيلًا مناسبًا.

١٠-٤ تحسب توقع التوزيع الهندسي.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الحادي عشر الوحدة التاسعة	تحسب القيمة المتوقعة لعدد ثابت من التجارب المستقلة إذا علمت احتمال وقوع حدث محدد.	١) رُمي حجرا نرد منتظمَين ٣٧٨ مرة. كم مرة تتوقع أن مجموع العددَين الظاهرَين أكثر من ٨؟
الصف الحادي عشر الوحدة الثامنة	تجد مفكوك ناتج ضرب عبارات جبرية. تستخدم مفكوك $(أ + ب)^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.	٢) إذا علمت أن $(أ + ب)^{٣} = أ^{٣} + ٣ أ^{٢}ب + ٣ أب^{٢} + ب^{٣}$ فأوجِد الكسور الأربعة في مفكوك $\left(\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}\right)^{٣}$ وتأكد من أن المجموع يساوي ١
	تحسب عدد التوافيق لـ ر عنصرًا من ن عنصرًا مختلفًا باستخدام القانون: $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$	٣) أوجِد $\binom{٧}{٣}$

المفردات

نموذج رياضيّ mathematical model

توزيع ذي الحدَّين binomial distribution

التوزيع الهندسي geometric distribution

لماذا ندرس توزيع ذي الحدّين والتوزيع الهندسي؟

يمكن استخدام التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لإيجاد احتمالات التجارب العشوائية ذات المتغيرات المنفصلة (المتقطعة)، والتي يكون لها ناتجان مستقلان فقط إما النجاح أو الفشل، ويكون احتمال النجاح فيها ثابتًا، فمثلًا: أعمال الاستثمارات قد تحقق ربحًا أو خسارة، وقد يكون المُدّعى عليه في قضية ما في المحكمة بريئًا أو مذنبًا، وأيضًا رمي الكرة في مباراة كرة السلة إما أن تدخل في السلة أو لا تدخل.

في الحياة اليومية نجد الكثير من المواقف التي تؤدّي إلى النجاح أو إلى الفشل، ولذلك فإن اعتماد النواتج على النتيجتين 'نعم/ لا' يسمح لنا أن نصف بعض المواقف باستخدام **نموذج رياضيّ mathematical model**.

ومن تلك النماذج الرياضية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية المنفصلة، والتي تظهر نتيجة تكرار التجارب المستقلة حين يكون احتمال النجاح فيها ثابتًا ما يلي:

- **توزيع ذي الحدَّين binomial distribution**، ويستخدم لتمثيل عدد النجاحات لعدد ثابت من التجارب المستقلة.
- **التوزيع الهندسي geometric distribution**، ويستخدم لتمثيل عدد من التجارب حتى حدوث أول نجاح لعدد غير منتهٍ من التجارب المستقلة.

١٠-١ توزيع ذي الحدّين

يعتبر توزيع ذي الحدين أحد أهم نماذج التوزيع الاحتمالي المنفصل حيث تتحقق فيه شروطه كما في المثال الآتي:

لنفترض أننا أجرينا تجربة رمي حجر نرد أربع مرات.

ليكن ر عدد مرات ظهور العدد ٦ فيكون ر $\in$ {٠، ١، ٢، ٣، ٤}.

الحصول على العدد ٦، يعتبر حدث النجاح، **ف** تمثل حدث عدم الحصول على العدد ٦ (حدث الفشل) ويكون احتمال نجاح واحتمال فشل كل محاولة كالآتي:

ل (نجاح) = ل (٦) = $\frac{١}{٦}$

ل (فشل) = ل (ف) = ١ − $\left(\frac{١}{٦}\right)$ = $\frac{٥}{٦}$

نحسب احتمالات ل (ر) لجميع قيم ر كما في الجدول الآتي:

مُساعَدة

كل محاولة للحصول على أي عدد من ١ إلى ٦ لها احتمالية الحدوث نفسها.

ر	نتائج التجربة	عدد النتائج	ل (ر)	استخدام ذي الحدين في إيجاد ل (ر)
٠	(ف، ف، ف، ف)	$\binom{٤}{٠} = ١$	ل (٠) = $\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} = \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$	$\binom{٤}{٠}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٠}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$
١	(٦، ف، ف، ف) ، (ف، ٦، ف، ف) ، (ف، ف، ٦، ف) ، (ف، ف، ف، ٦)	$\binom{٤}{١} = ٤$	ل (١) = $\left(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right) + \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right)$ $+ \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right) + \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦}\right)$ $= ٤ \left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$	$\binom{٤}{١}\left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$
٢	(٦، ٦، ف، ف) ، (٦، ف، ٦، ف) ، (٦، ف، ف، ٦) ، (ف، ٦، ٦، ف) ، (ف، ٦، ف، ٦) ، (ف، ف، ٦، ٦)	$\binom{٤}{٢} = ٦$	ل (٢) = $\left(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right) + \left(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right)$ $+ \left(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦}\right) + \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right)$ $+ \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦}\right) + \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}\right)$ $= ٦ \left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٢}$	$\binom{٤}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٢}$
٣	(٦، ٦، ٦، ف) ، (٦، ٦، ف، ٦) ، (٦، ف، ٦، ٦) ، (ف، ٦، ٦، ٦)	$\binom{٤}{٣} = ٤$	ل (٣) = $\left(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}\right) + \left(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦}\right)$ $+ \left(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}\right) + \left(\frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}\right)$ $= ٤ \left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{١}$	$\binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{١}$
٤	(٦، ٦، ٦، ٦)	$\binom{٤}{٤} = ١$	ل (٤) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \left(\frac{١}{٦}\right)^{٤}$	$\binom{٤}{٤}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٤}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٠}$

نلاحظ من الجدول أن ل (ر) = $\binom{٤}{ر}\left(\frac{١}{٦}\right)^{ر}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤-ر}$. هذه الاحتمالات هي حدود في مفكوك ذي الحدَّين $\left(\frac{١}{٦}+\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$.

الشروط الواجب توافرها في المتغير العشوائي المنفصل الذي يتبع توزيع ذي الحدَّين:

- يوجد ن تجربة مكررة مستقلة.
- قيمة ن محدودة.
- لكل تجربة نتيجتان ممكنتان فقط (نجاح و فشل).
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وهو ب، وكذلك احتمال الفشل ثابت وهو (١ − ب).

المتغيّر العشوائي المنفصل (س) يتبع توزيع ذي الحدَّين، ويشار إليه بـ س ~ ث (ن، ب).

نتيجة ١

إذا كان س ~ ث (ن، ب)، فإن احتمال ر نجاح هو ل (ر) = $\binom{ن}{ر}$ ب^{ر}(١ − ب)$^{ن-ر}$ حيث أن
ن عدد مرات تكرار التجربة،
ر = ٠، ١، ٢، ....، ن، (ر مرات النجاح)
ب احتمال النجاح حيث ٠ < ب < ١

فمثلًا: إذا كان المتغيّر س ~ ث (٣، ب)، فإن س ∈ {٠، ١، ٢، ٣}، وتكون لدينا الاحتمالات الآتية:

ل(س = ٠) = $\binom{٣}{٠}$ × ب^{٠} × (١ − ب)^{٢} = ١(١ − ب)^{٣}

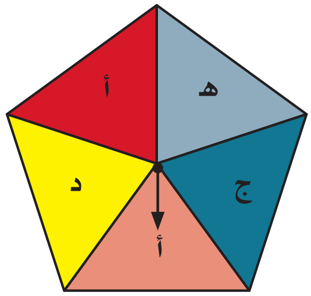
ل(س = ١) = $\binom{٣}{١}$ × ب^{١} × (١ − ب)^{٢} = ٣ب^{١}(١ − ب)^{٢}

ل(س = ٢) = $\binom{٣}{٢}$ × ب^{٢} × (١ − ب)^{١} = ٣ب^{٢}(١ − ب)^{١}

ل(س = ٣) = $\binom{٣}{٣}$ × ب^{٣} × (١ − ب)^{٠} = ١ب^{٣}

مثــال ١

يبيّن الشكل المجاور قرصًا دوّارًا خماسيًا منتظمًا.
إذا دُوِّر القرص ١٠ مرات، فأوجِد احتمال أن يتوقف المؤشر عند الحرف أ ثلاث مرات.



الحــلّ:

حدث النجاح هو توقف المؤشر عند الحرف أ
حدث الفشل هو عدم توقف المؤشر عند الحرف أ
احتمال النجاح هو ب = $\frac{٢}{٥}$ = ٠٫٤
احتمال الفشل هو ١ − ب = ١ − $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ = ٠٫٦
فيكون س ~ ث (١٠، ٠٫٤)
ل(س = ٣) = $\binom{١٠}{٣}$ × (٠٫٤)^{٣} × (٠٫٦)^{٧}
= $\frac{١٠!}{٣! \times ٧!}$ × (٠٫٤)^{٣} × (٠٫٦)^{٧}
= ٠٫٢١٥ لأقرب ٣ أرقام معنوية.

مُساعَدة

س ~ ث (ن، ب) تعني: المتغير العشوائي (س) يتبع توزيع ذي الحدَّين ث (ن، ب)، حيث ث هو التوزيع ذي الحدَّين ، ن هو عدد التجارب و ب هو احتمال النجاح في كل تجربة.

مُساعَدة

قيم $\binom{ن}{ر}$ هي معاملات حدود ذي الحدَّين، وتعطي عدد طرق الحصول على ر نجاحًا في تجربة مكررة ن مرة. ب^{ر}(١ − ب)$^{ن-ر}$ هو احتمال لكل محاولة نحصل فيها على ر نجاحًا و(ن − ر) فشلًا.

مُساعَدة

معاملات حدود ذي الحدَّين للقوة ٣ هي: ١، ٣، ٣، ١

مثــال ٢

إذا علمت أن س ~ ث (٨ ، ٠,٧)، فأوجِد ل(س > ٦)، لأقرب ٣ أرقام معنوية.

الحــلّ:

س ~ ث (٨، ٠,٧): ن = ٨ ، ب = ٠,٧ ، ١ − ب = ٠,٣

وعليه، يكون س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ل(س > ٦) = ل(س = ٧) + ل(س = ٨)

$= \binom{٨}{٧} \times (٠,٧)^{٧} \times (٠,٣)^{١} + \binom{٨}{٨} \times (٠,٧)^{٨} \times (٠,٣)^{٠}$

= ٠,١٩٧٦٥٠٣٢ + ٠,٠٥٧٦٤٨٠١

= ٠,٢٥٥

مُساعَدة

إجراء تقريب قيمة الاحتمالات مسبقًا خلال الحل يقود إلى إجابة غير دقيقة، كما في هذا المثال:

٠,٠٥٧٦ + ٠,١٩٨ = ٠,٢٥٦

كما يمكن استخدام الآلة الحاسبة كخطوة واحدة لإجراء العمليات مرة واحدة ثم تقريب الناتج النهائي.

مثــال ٣

في بلد ما ٨٥٪ من السكان يحملون العامل الرايزيسي الموجب (R+).
أوجِد احتمال أن يكون أقل من ٣٩ شخصًا من عيّنة عشوائية مكوّنة من ٤٠ شخصًا يحملون العامل الرايزيسي الموجب.

الحــلّ:

افترض أن المتغيّر العشوائي (س) هو عدد الأشخاص الذين يحملون العامل الرايزيسي (R+) فيكون س ~ ث (٤٠، ٠,٨٥)

ل(س > ٣٩) = ١ − [ل(س = ٣٩) + ل(س = ٤٠)]

$= ١ - \left[\binom{٤٠}{٣٩} \times (٠,٨٥)^{٣٩} \times (٠,١٥)^{١} + \binom{٤٠}{٤٠} \times (٠,٨٥)^{٤٠} \times (٠,١٥)^{٠}\right]$

= ٠,٩٨٨ لأقرب ٣ أرقام معنوية.

مُساعَدة

يمكن إيجاد ل(س > ٣٩) = ل(٠) + ل(١) + ... + ل(٣٨) من خلال توظيف برامج تفاعلية مثل Geogebra لحساب هذا الاحتمال.

مثــال ٤

إذا علمت أن س ~ ث (ن، ٠,٤)، ل(س = ٠) > ٠,١ ، فأوجِد أقل قيمة ممكنة لـ ن.

الحــلّ:

$ل(س = ٠) = \binom{ن}{٠} \times (٠,٤)^{٠} \times (٠,٦)^{ن} = (٠,٦)^{ن}$ — أوجِد ل(س = ٠) بدلالة ن

فيكون $(٠,٦)^{ن} > ٠,١$ — نأخذ لوغاريتم للأساس ١٠ للطرفين

لـو $(٠,٦)^{ن} >$ لـو ٠,١ — نحصل على المتباينة التي يمكن حلها باستخدام لـو

ن لـو (٠,٦) > لـو ٠,١

−٠,٢٢٢ ن > −١

مُساعَدة

قيمة لوغاريتم أي كسر عشري بين ٠ و ١ تكون سالبة دائمًا.

ن $>$ $\frac{-١}{-٠,٢٢٢}$ .... تم عكس إشارة المتباينة بسبب القسمة على عدد سالب

ن $>$ ٤,٥٠ .... ن عدد صحيح موجب

ن = ٥ أقل قيمة ممكنة لـ ن .... لأن ن عدد مرات اجراء التجربة ولا يمكن أن يكون كسر لذا نبحث عن أصغر عدد صحيح أكبر من ٤,٥ وهو ٥

طريقة بديلة:

باستخدام المحاولة والخطأ (خمّن وتحقق)

$(٠,٦)^{١}$ = ٠,٦

$(٠,٦)^{٢}$ = ٠,٣٦

$(٠,٦)^{٣}$ = ٠,٢١٦

$(٠,٦)^{٤}$ = ٠,١٢٩٦

$(٠,٦)^{٥}$ = ٠,٠٧٧٧٦

أقل قيمة لـ ن = ٥

مُساعَدة

ن تأخذ قيمًا صحيحة موجبة فقط.

تمارين ١٠-١

١) إذا كان المتغير (س) يتبع توزيعًا ذا حدَّين، حيث ن = ٤، ب = ٠,٢، فأوجد:

أ ل(س = ٤)　　ب ل(س = ٠)　　ج ل(س = ٣)　　د ل(س = ٣ أو ٤)

٢) إذا علمت أن ص ~ ث (٧، ٠,٦)، فأوجد:

أ ل(ص = ٧)　　ب ل(ص = ٥)　　ج ل(ص ≠ ٤)　　د ل(٣ $<$ ص $<$ ٦)

٣) إذا علمت أن ح ~ ث (٩، ٠,٣٢)، فأوجد:

أ ل(ح = ٥)　　ب ل(ح ≠ ٥)　　ج ل(ح $<$ ٢)　　د ل(٠ $<$ ح $<$ ٩)

٤) أوجِد احتمال كل حدث من الأحداث الآتية:

أ ظهور ٥ صور عند رمي قطعة نقد منتظمة ٩ مرات.

ب ظهور العدد ٦ مرتَين عند رمي حجر نرد منتظم ١١ مرة.

٥) ينجح في اختبار القيادة ٧٠ ٪ من الأشخاص من المحاولة الأولى. أوجِد احتمال أن ينجح ٥ أشخاص اختيروا عشوائيًا من بين ٨ أشخاص تقدموا للاختبار لأول مرة.

٦) فرصة لاعب كرة قدم للتسجيل في كل ضربة جزاء هي ٩٥٪. أوجِد احتمال:

أ أن يُسجل جميع ضربات الجزاء الـ ١٠ التالية.

ب يفشل في تسجيل واحدة من سبع ضربات الجزاء التالية.

٧) معدل فشل زراعة بذور نوع معيّن من الطماطم هو ١٣٪ خلال ١٠ أيام من زراعتها. أوجِد احتمال أن تنجح زراعة ٣٤ أو ٣٥ بذرة اختيرت عشوائيًا من ٤٠ بذرة خلال ١٠ أيام من زراعتها.

٨) ينتج مصنع ألواح دوائر إلكترونية، ومعدل وجود خطأ فيها ٠,٣ ٪ . أوجِد احتمال أن يحصل في عيّنة عشوائية من ٢٠٠ لوح:

أ خطأ في لوح واحد فقط.

ب خطأ في أقل من لوحَين.

١٠-٢ التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدّين

التوقع (الوسط الحسابي) مقياس للنزعة المركزية، والانحراف المعياري هو مقياس التشتت لتوزيع ذي الحدَّين.

افترض أن س ~ ث (٢، ٠,٦)، التوزيع الاحتمالي مبيّن في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,١٦	٠,٤٨	٠,٣٦

بتطبيق صيغ ت (س)، ع^{٢}(س) يعطي النتائج الآتية:

ت (س) = $\sum$ س ل (س) = (٠ × ٠,١٦) + (١ × ٠,٤٨) + (٢ × ٠,٣٦) = ١,٢

ع^{٢} (س) = $\sum$ س^{٢} ل (س) − (ت (س))^{٢}

= (٠^{٢} × ٠,١٦) + (١^{٢} × ٠,٤٨) + (٢^{٢} × ٠,٣٦) − (١,٢)^{٢}

= ٠,٤٨

وبطريقة أخرى يمكننا إيجاد القيمة المتوقعة ت (س)، والتباين (ع^{٢}(س)) كالآتي: ففي التوزيع س ~ ث (٢، ٠,٦) تكون:

ت (س) = ن ب = ٢ × ٠,٦ = ١,٢

ع^{٢} (س) = ن ب (١ − ب) = ٢ × ٠,٦ × ٠,٤ = ٠,٤٨

نتيجة ٢

في التوزيع س ~ ث (ن، ب):

التوقع هو ت (س) = ن ب،

التباين هو ع^{٢} (س) = ن ب (١ − ب)

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

ع(س) = $\sqrt{\text{ن ب (١ − ب)}}$

مثـــال ٥

إذا علمت أن س ~ ث (١٢، ٠,٣)، فأوجِد (لأقرب ٣ أرقام معنوية):

أ التوقع

ب التباين

ج الانحراف المعياري

الحـــلّ:

أ التوقع ت (س) = ن ب

= ١٢ × ٠,٣

= ٣,٦

تذكير

درسنا في الدرس ٩-٣ أن القيمة المتوقعة هي الوسط الحسابي لعدد كبير من التجارب.

تذكير

في المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع) يكون:

التوقع:

ت (س) = $\sum$ س ل (س)

التباين:

ع^{٢} (س) =

$\sum$ س^{٢} ل (س) − (ت (س))^{٢}

ب التباين ع^2(س) = ن ب (١ − ب)

= ١٢ × ٠,٣ × ٠,٧

= ٢,٥٢

ج الانحراف المعياري ع (س) = $\sqrt{\text{ن ب (١ − ب)}}$

= $\sqrt{٢,٥٢}$

= ١,٥٩

مثــال ٦

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي س ~ ث (ن، ب). إذا علمت أن ت(س) = ١٢، ع^2(س) = ٧,٥، فأوجِد:

أ ن ، ب

ب ل(س = ١١)

الحــلّ:

∵ ت (س) = ن ب = ١٢ .... (١)

ع^2(س) = ن ب (١ − ب) = ٧,٥ .... (٢)

$\frac{\text{ع}^2\text{(س)}}{\text{ت (س)}} = \frac{\text{ن ب (١ − ب)}}{\text{ن ب}}$

أ ١ − ب = $\frac{٧,٥}{١٢}$ = ٠,٦٢٥ .... اقسم (٢) على (١) لتجد ب

ب = ١ − ٠,٦٢٥ = ٠,٣٧٥

ت (س) = ن ب

ن = $\frac{\text{ت (س)}}{\text{ب}}$

ن = $\frac{١٢}{٠,٣٧٥}$ = ٣٢

ب ل(س = ١١) = $\binom{٣٢}{١١}$ × (٠,٣٧٥)^{١١} × (٠,٦٢٥)^{٢١} ..... س ~ ث (٣٢، ٠,٣٧٥).

= ٠,١٣٨ مقرب لأقرب ٣ أرقام معنوية.

تمارين ١٠-٢

١) احسب القيمة المتوقعة، والتباين، والانحراف المعياري لكل متغير عشوائي منفصل (مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية) في كل مما يأتي:

أ ح ~ ث (٥، ٠,٢)

ب ط ~ ث (٢٤، ٠,٥٥)

ج س ~ ث (٣٦٥، ٠,١٨)

د ص ~ ث (٢٠، $\sqrt{٠,٥}$)

٢) إذا علمت أن س ~ ث (٨ ، ٠,٢٥)، فاحسب:

أ ت(س)

ب $ع^{٢}$(س)

ج ل(س = ت(س))

د ل(س > ت(س))

٣) إذا علمت أن ص ~ ث (١١، ٠,٢٣)، فاحسب:

أ ل(ص ≠ ٣)

ب ل(ص > ت(ص))

٤) إذا علمت أن س ~ ث (ن، ب)، ت(س) = ٢٠، $ع^{٢}$(س) = ١٢، فأوجِد:

أ قيمة ن ، ب

ب ل(س = ٢١)

٥) إذا علمت أن المتغير (ف) يتبع توزيعًا ذا حدَّين حيث ت(ف) = ٢,٧، $ع^{٢}$(ف) =٠,٢٧

أ أوجِد قيم ن، ب

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (ف).

٦) كل من الحالات الآتية لا تمثل توزيعًا ذا حدَّين. ما السبب؟

أ **س** هو طول أطول شخص عند اختيار ثلاثة أشخاص عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من ١٠ أشخاص.

ب **س** هو عدد البنات اللاتي تم اختيارهن عندما نختار طفلَين عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من بنت وثلاثة أولاد.

ج **س** هو عدد الدراجات المختارة عند اختيار أربع مركبات عشوائيًا من موقف مركبات فيه ١٣٤ سيارة صغيرة، و ١٧ حافلة، و ٩ دراجات.

٧) المتغير العشوائي ح ~ ث (١٩٢، ب)، ت(ح) يساوي ٢٤ ضعف الانحراف المعياري للمتغير (ح). احسب قيمة ب، وقيمة ك إذا علمت أن ل(ح = ٢) = ك × $٢^{-٣٧٩}$

٨) يحتوي صندوق على ٤٦٢ عود ثقاب، ويقدّر أن ١,٣٪ منها تالفة.

أ احسب العدد المتوقع لأعواد الثقاب التالفة في الصندوق.

ب احسب تباين عدد أعواد الثقاب التالفة، وتباين عدد الأعواد الصالحة في صندوق ما.

ج بيّن على وجه التقريب أن ١٠,٤٪ من صناديق أعواد الثقاب تحتوي على ثمانية أعواد تالفة فقط.

د احسب احتمال أن يحتوي أحد الصناديق على الأقل من عيّنة من صندوقَين على ثمانية أعواد ثقاب تالفة فقط.

١٠-٣ التوزيع الهندسي

عندما نرمي حجر نرد للحصول على الرقم ٦

ما إمكانية الحصول على الرقم ٦ من أول مرة نرمي فيها حجر النرد؟

وما إمكانية الحصول على الرقم نفسه من ثاني مرة نرمي فيها حجر النرد؟

وما إمكانية الحصول عليه من ثالث مرة نرمي فيها حجر النرد؟ وهكذا...

نجيب عن الأسئلة باستخدام احتمال النجاح والفشل: ب، ١ − ب.

ل(الحصول على الرقم ٦ من أول رمية) = ب ← نجاح.

ل(الحصول على الرقم ٦ من ثاني رمية) = (١ − ب)ب ← فشل تبعه نجاح.

ل(الحصول على الرقم ٦ من ثالث رمية) = $(١ - ب)^{٢}$ب ← فشل مرتَين يتبعهما نجاح.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) 'عدد المحاولات للحصول على أول نجاح في سلسلة من المحاولات المتكررة المستقلة' يُسمى التوزيع الهندسي.

يبيّن الجدول الآتي احتمال حدوث أول نجاح عند المحاولة 'ر':

ر	١	٢	٣	٤	....	ن	....
ل(ر)	ب	ب(١ − ب)	ب$(١ - ب)^{٢}$	ب$(١ - ب)^{٣}$	....	ب$(١ - ب)^{ن-١}$	....

تذكير

جـ∞ = $\frac{أ}{١ - ر}$، حيث

أ = الحدّ الأول

ر = الأساس، −١ < ر < ١

تمثّل قيم ل(ر) في الجدول السابق حدود متتالية هندسية أول حدّ فيها ب وأساسها (١ − ب). مجموع الاحتمالات يساوي متسلسلة هندسية لانهائية.

$$\sum ل(س = ر) = جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{ب}{١ - (١ - ب)} = ١$$

مجموع احتمالات التوزيع الاحتمالي الهندسي يساوي ١

يكون للمتغير العشوائي المنفصل (س) المعرّف بالمتغيّر (ب) توزيع هندسي إذا حقق الشروط الآتية:

- المحاولات المكررة مستقلة.
- يمكن أن يكون عدد المحاولات المكررة لانهائيًا.
- هناك نتيجتان ممكنتان لكل محاولة (نجاح و فشل).
- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو ب.

نتيجة ٣

يرمز إلى المتغير العشوائي (س) ذي التوزيع الهندسي بالرمز س ~ هندسي (ب)، واحتمال حدوث أول نجاح هو في المحاولة رقم ر هو ل(س = ر) = ب$(١ - ب)^{ر-١}$، ر = ١، ٢، ٣، ...

نلاحظ أن الفرق الجوهري بين التوزيعين ذي الحدين والهندسي هو أن عدد التجارب (المحاولات) في التوزيع ذي الحدَّين ثابت من البداية، ويمكن عدّ مرات النجاح، بينما في التوزيع الهندسي تتكرر المحاولات حتى يتم حدوث أول نجاح.

في التوزيع س ~ ث (ن، ب) يوجد $\binom{ن}{ر}$ طريقة للحصول على ر نجاحًا.

في التوزيع س ~ هندسي (ب) يوجد طريقة واحدة للحصول على أول نجاح بعد ر محاولة، أي عند حدوث ر − ١ فشل أُتبعت بنجاح واحد.

مثــال ٧

وجد في محاولات مستقلة مكررة أن احتمال النجاح في كل محاولة ٠,٦٦

أوجِد احتمال حدوث أول نجاح لأقرب ٣ ارقام معنوية:

أ في المحاولة الثالثة.

ب قبل المحاولة الثالثة.

ج بعد المحاولة الثالثة.

الحــلّ:

أ ل(س = ٣) = ب(١ − ب)^٢

= ٠,٦٦ × (٠,٣٤)^٢

= ٠,٠٧٦٣

ليكن س عدد المحاولات حتى حدوث النجاح الأول. فيكون التوزيع هندسيًا س ~ هندسي (٠,٦٦). حيث ب = ٠,٦٦، ١ − ب = ٠,٣٤

ب ل(س > ٣) = ل(س ⩽ ٢) = ل(س = ١) + ل(س = ٢)

= ب + ب(١ − ب)

= ٠,٨٨٤

ج ل(س < ٣) = ١ − ل(س ⩽ ٣)

=١ − (ل (س = ٣) + ل (س ⩽ ٢))

= ١ − [٠,٨٨٤ + ٠,٠٧٦٣]

= ٠,٠٣٩٧

في الجزئية (أ) أوجدنا الاحتمال لـ ٣ محاولات.

في الجزئية (ب) أوجدنا الاحتمال لـ أقل من ٣ محاولات.

بالنسبة إلى الجزئية (ج)، وهو احتمال للحدث أن يكون أكبر من ٣، يمكننا أن نحسبه باستخدام ١ − (الناتج في الجزئية (أ) + الناتج في الجزئية (ب))

يمكن أن تحسب الاحتمالات التي تتضمن متباينات بأن تجد المجموع لقيم صغيرة لـ ر، كما في الجزئيتَين ب، ج من المثال ٧، إلّا أنه لقيم ر الكبيرة، فإننا نستخدم النتيجة الآتية:

نتيجة ٤

عندما س ~ هندسي (ب)، فإن:

- ل(س ⩽ ر) = ١ − (١ − ب)^{ر}
- ل(س < ر) = (١ − ب)^{ر}

مثـــال ٨

في بلد ما ١٨٪ من البالغين يضعون عدسات طبية. اختير عدد من الأشخاص عشوائيًا وتم مقابلتهم واحدًا تلو الآخر. أوجِد احتمال أن أول شخص يضع عدسة طبية هو:

أ واحد من أول ١٥ شخصًا تمّت مقابلتهم.

ب لم يكن من أول تسعة أشخاص تمّت مقابلتهم.

الحـــلّ:

أ ل(س ⩽ ١٥) = ١ − (١ − ب)^{١٥}

= ١ − (٠,٨٢)^{١٥}

= ٠,٩٤٩

س يمثل عدد الأشخاص الذين تمّ مقابلتهم حتى تمّ مقابلة أول شخص يضع عدسات طبية
س ~ هندسي (٠,١٨)،
(١ − ب) = ١ − ٠,١٨ = ٠,٨٢

ب ل(س > ٩) = (١ − ب)^{٩}

= (٠,٨٢)^{٩}

= ٠,١٦٨

مثـــال ٩

رُميت عملة معدنية غير منتظمة، وكان احتمال ظهور الصورة في كل رمية يساوي $\frac{٥}{١١}$. فإذا رُميت العملة المعدنية حتى ظهرت الصورة لأول مرة. أوجِد احتمال أن تكون العملة قد رُميت:

أ على الأقل ست مرات.

ب أقل من ثماني مرات.

الحـــلّ:

أ ل(س ⩾ ٦) = ل(س > ٥)

= (١ − ب)^{٥}

= $\left(\frac{٦}{١١}\right)^{٥}$

= ٠,٠٤٨٣

عبارة 'ست مرات على الأقل' تعني س > ٥
افترض أن س يمثل عدد المرات التي رُميت بها العملة حتى ظهرت الصورة. ويكون التوزيع الاحتمالي س ~ هندسي $\left(\frac{٥}{١١}\right)$، (١ − ب) = $\frac{٦}{١١}$

ب ل(س < ٨) = ل(س ⩽ ٧)

= ١ − (١ − ب)^{٧}

= ١ − $\left(\frac{٦}{١١}\right)^{٧}$

= ٠,٩٨٦

عبارة 'أقل من ثماني مرات' تعني 'سبع مرات وأقل'

تمارين ١٠-٣

١) إذا علمت أن المتغير العشوائي المنفصل توزيعه الاحتمالي س ~ هندسي (٠,٢)، فأوجِد:

أ ل(س = ٧)   ب ل(س ≠ ٥)   ج ل(س > ٤)

٢) يُخطئ لاعب كرة قدم، ويعطي الفريق الخصم ضربة جزاء في كل ست مباريات يشارك فيها. أوجد احتمال أن تكون ضربة الجزاء التالية التي يتسبب بها اللاعب:

أ في المباراة الثامنة التي يشارك فيها.

ب بعد المباراة الرابعة التي يشارك فيها.

٣) رُقّمت الأوجه الخمسة لقرص دوّار منتظم بالأرقام ١، ١، ٢، ٣، ٤،
دُوّر القرص عددًا من المرات حتى ظهر الرقم ١، أوجِد احتمال أن يكون قد دُوّر:

أ مرتَين فقط.

ب على الأكثر خمس مرات.

ج على الأقل ثماني مرات.

٤) احتمال أن تكون وحدة تالفة من إنتاج مصنع ما ٠,٠٧، واختير عدد من وحدات الإنتاج عشوائيًا، واختُبرت صلاحيتها.

أ أوجِد احتمال أن تكون أول وحدة تالفة:

١) هي الوحدة رقم ١٢

٢) ليست من أول ١٠ وحدات اختُبرت.

٣) واحدة من أول ٨ وحدات اختُبرت.

ب ما الفرضية التي كوّنتها حول ظهور وحدات تالفة تمكنك من أن تحسب الاحتمالات في الجزئية (أ)؟

٥) في أحد الشوارع الممتدة ١٤٪ من المركبات هي شاحنات نقل بضائع. تقف فتاة على جسر للمشاة مطل على هذا الشارع، وتبدأ بِعَدّ المركبات حتى تعبر أول شاحنة نقل. أوجِد احتمال أن تكون قد عدّت:

أ على الأكثر ثلاث مركبات.

ب على الأقل خمس مركبات.

٦) أي من الحالات الآتية يمثّل توزيعًا هندسيًا؟ وأيّها لا يمثّل؟ أوضح إجابتك.

أ يحتوي صندوق على حبّتَي تفاح حمراوَين، وعلى عدد كبير من حبّات التفاح الأخضر. اختار طفل حبّة تفاح عشوائيًا وأكلها، واختار الحبّة الثانية وأكلها، وهكذا... المتغير (س) هو عدد حبّات التفاح التي اختارها الطفل وأكلها حتى اختار حبّة تفاح خضراء اللون.

ب يجلس طفل صغير أمام حاسوب محمول وعلى شاشته برنامج كتابة نصوص. س هو عدد المفاتيح التي ينقرها الطفل عشوائيًا حتى نقر أول مفتاح أكمل كلمة من ثلاثة أحرف ذات معنى.

ج المتغير (س) هو عدد مرات إسقاط حبّة أرزّ من ارتفاع مترَين على لوحة شطرنج، إلى أن استقرت أول مرة هذه الحبّة على مربع أبيض في اللوحة.

د المتغير (س) هو عدد المرات التي شارك فيها رياضي في سباق جري حتى ربح أول سباق.

٧) ليكن التوزيع الهندسي للمتغير العشوائي (ط) حيث $\frac{ل(ط = ٢)}{ل(ط = ٥)} = ١٥,٦٢٥$

أوجِد ل(ط = ٣).

٨) إذا علمت أن س ~ هندسي (ب)، ل(س ⩾ ٤) = $\frac{٢٣٨٥}{٢٤٠١}$، فأوجد ل(١ ⩾ س > ٤).

١٠-٤ التوقع للتوزيع الهندسي

تذكّر أن الوسط الحسابي لمتغير عشوائي منفصل على المدى الطويل للتجربة هو القيمة المتوقعة، ويرمز إليه ت(س) حيث ت(س) = $\sum$ س ل(س).

عند تطبيق ذلك على التوزيع الهندسي، نجد التوقع كما في النتيجة (٥):

نتيجة ٥

إذا كان س ~ هندسي (ب)، فإن:

التوقع ت(س) = $\frac{١}{ب}$ (مقلوب ب)، حيث ٠ < ب < ١

استكشف ١

استخدم الجبر لتبرهن أن التوقع للتوزيع الهندسي يساوي $\frac{١}{ب}$.

للتوزيع س ~ هندسي (ب)، يكون س ∈ {١، ٢، ٣، ٤، ...}، ل(س) = {ب، ب(١ − ب)، ب(١ − ب)^{٢}، ب(١ − ب)^{٣}، ...}، حيث ب = ٠,٦

الخطوة ١: تكوين معادلة تعبّر عن ت(س) بدلالة ب، (١ − ب). وباستخدام ت(س) = $\sum$ س ل(س).

الخطوة ٢: اضرب طرفَي المعادلة التي حصلت عليها في الخطوة ١ في (١ − ب)

الخطوة ٣: اطرح إحدى المعادلتَين من الأخرى.

الخطوة ٤: إذا نجحت في التعامل مع الخطوات ١، ٢، ٣ فلن تحتاج إلى مساعدة لإكمال البرهان.

مثــال ١٠

إذا كان المتغير (س) يتبع توزيعًا هندسيًا، وكانت ت(س) = $٣\frac{١}{٢}$، فأوجِد ل(س < ٦).

الحــلّ:

ت(س) = $\frac{١}{ب}$ .... أوجِد المتغير (ب) أولًا، ثم أوجِد (١ − ب)

$\frac{٧}{٢}$ = $\frac{١}{ب}$ .... عوّض عن ت(س) بـ$\left(\frac{٧}{٢}\right)$

ب = $\frac{٢}{٧}$ .... من خلال ضرب الوسطين في الطرفين

(١ − ب) = ١ − $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{٥}{٧}$

ل(س < ٦) = (١ − ب)^{٦} .... استخدم ل(س < ر) = (١ − ب)^{ر}، نتيجة ٤

= $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٦}$

= ٠,١٣٣

مثــال ١١

إذا علمت أن س ~ هندسي (ب)، وأن ل(س ⩽ ٣) = $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$، فأوجد:

أ ل(س > ٣)

ب ل(١ < س ⩽ ٣)

الحــلّ:

أ ل(س > ٣) = ١ − ل(س ⩽ ٣)

= ١ − $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$

= $\frac{٥١٢}{١٣٣١}$

ب ل(س ⩽ ٣) = ١ − (١ − ب)^{٣}

استخدم ل(س ⩽ ر) = ١ − (١ − ب)^{ر}، لإيجاد ب، (١ − ب)

$\frac{٨١٩}{١٣٣١}$ = ١ − (١ − ب)^{٣}

١ − $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$ = (١ − ب)^{٣}

$\sqrt[٣]{١ - \frac{٨١٩}{١٣٣١}}$ = (١ − ب)

$\frac{٨}{١١}$ = ١ − ب

∴ ب = $\frac{٣}{١١}$

ل(١ < س ⩽ ٣) = ل(س = ٢) + ل(س = ٣)

= ب(١ − ب) + ب(١ − ب)^{٢}

= $\frac{٤٥٦}{١٣٣١}$ ≈ ٠,٣٤٣

طريقة بديلة:

بعد ايجاد قيمة ب

يمكنك أن تستخدم ل(١ < س ⩽ ٣) = ل(س ⩽ ٣) − ل(س = ١)

= $\frac{٨١٩}{١٣٣١}$ − $\frac{٣}{١١}$

= $\frac{٤٥٦}{١٣٣١}$

مثـــال ١٢

يوجد صندوق واحد من كل أربعة صناديق لرقائق الذرة (cornflakes) يحوي لعبة مجانية. ليكن المتغير العشوائي س هو عدد الصناديق التي يفتحها طفل حتى يفتح الصندوق الذي يحتوي أول لعبة.

أ أوجِد القيمة المتوقعة لـ (س).

ب فسّر ما تعنيه القيمة التي وجدتها في الجزئية (أ).

الحـــلّ:

أ ت(س) = $\frac{١}{ب}$ = $\left(\frac{١}{٤}\right)^{-١}$ = ٤ .... المتغير العشوائي هو س ~ هندسي $\left(\frac{١}{٤}\right)$.

ب قد يجد الطفل أول لعبة في أول صندوق يفتحه، ولكن بناءً على التوقع سيجد الطفل لعبته الأولى في الصندوق الرابع الذي يفتحه.

تمارين ١٠-٤

١) إذا علمت أن س ~ هندسي (٠,٣٦) ، فأوجِد قيمة ت(س) في أبسط صورة.

٢) إذا كان المتغير العشوائي (ص) يتبع توزيعًا هندسيًا، وكان ل(ص = ١) = ٠,٢، فأوجِد ت(ص).

٣) إذا علمت أن ف ~ هندسي (ب)، و ت (ف) = $٤\frac{١}{٢}$، فأوجِد قيمة ل(ف = ٢).

٤) ليكن ط عدد مرات رمي قطعة نقود منتظمة، حتى ظهرت كتابة لأول مرة. أوجِد التوقع لـ ط.

٥) ليكن س عدد مرات رمي حجر نرد منتظم، حتى ظهر العدد ٦ لأول مرة. أوجِد:

أ ت (س).

ب ل (س > ت (س)).

٦) حجر نرد غير منتظم له ٤ أوجه مرقمة (١، ٣، ٥، ٧). احتمال ظهور كل رقم متناسب مع ذلك العدد (أي ل (س = ١) = $\frac{١}{ك}$ ، ل (س = ٣) = $\frac{٣}{ك}$، وهكذا)، أوجِد:

أ توقع عدد مرات رمي حجر النرد حتى ظهور أول عدد غير أوّلي.

ب احتمال ظهور أول عدد أوّلي في الرمية الثالثة.

٧) أظهرت دراسة وجود خلل في جين معيّن عند ٠,٢٪ من الناس، س هو عدد الأشخاص الذين اختيروا عشوائيًا حتى ظهر أول شخص يحمل الجين الذي فيه الخلل. إذا علمت أن ل(س ⩽ ك) > ٠,٨٦٥، فأوجِد:

أ ت(س).

ب أقل قيمة ممكنة لـ ك.

٨) يلعب أنور، وزيد لعبة يتبادلان فيها رمي قطعة نقود منتظمة. أول لاعب تُظهر رميته الصورة يكون هو الرابح. يرمي أنور قطعة النقود أولاً، واحتمال أن يربح اللعبة هو $(٠,٥)^{١} + (٠,٥)^{٣} + (٠,٥)^{٥} + (٠,٥)^{٧} + \dots$

أ أنشئ جدول سلسلة النتائج عندما يربح أنور في الرمية الثالثة.

ب أوجِد بصورة مشابهة احتمال أن يربح زيد اللعبة.

ج أوجِد احتمال أن يربح أنور اللعبة.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- يمكن استخدام توزيع ذي الحدَّين لتمثيل عدد النجاحات في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة عددها ن، حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز له بالرمز (ب).
  - إذا كان س ~ ث (ن، ب) فإن $ل(ر) = \binom{ن}{ر} ب^{ر}(١ - ب)^{ن - ر}$
    - ت(س) = ن ب
    - $ع^{٢}(س) = ن ب(١ - ب)$
    - $ع(س) = \sqrt{ن ب (١ - ب)}$
- يمكن استخدام التوزيع الهندسي لتمثيل عدد المحاولات حتى حدوث أول نجاح في سلسلة محاولات مكررة ومستقلة حيث احتمال النجاح في كل محاولة ثابت ويرمز له بالرمز (ب).
  - إذا كان س ~ هندسي (ب) فإن $ل(ر) = ب(١ - ب)^{ر - ١}$، ر = ١، ٢، ٣، ...
    - $ل(س \leqslant ر) = ١ - (١ - ب)^{ر}$، و $ل(س > ر) = (١ - ب)^{ر}$
    - $ت(س) = \frac{١}{ب}$

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة العاشرة

١) إذا علمت أن س ~ ث $\left(\text{ن}، \frac{١}{\text{ن}}\right)$، فأوجد ل(س = ١) بدلالة ن.

٢) حجزت عائلة لقضاء إجازة طويلة في مدينة ما حيث احتمال أن يتساقط المطر في أيّ يوم ٠,٣
أوجد احتمال أن:

أ تمطر أول مرة في اليوم الثالث من الإجازة. ب أن لا تمطر في أول أسبوعَين من الإجازة.

٣) يُعطى رجل آلي مصنوع من البلاستيك كهدية مجانية داخل كل صندوق بسكويت من نوع معيّن. يوجد أربعة ألوان للرجل الآلي هي: الأحمر، والأصفر، والأزرق، والأخضر. وكل لون له فرصة الحدوث نفسها.
اشترى عيسى بعض صناديق البسكويت هذه:

أ أوجِد احتمال أن الصندوق الأول يحتوي على رجل آلي أخضر اللون.

ب أوجِد احتمال أن يحصل على أول رجل آلي أخضر اللون عندما يفتح الصندوق الخامس.

ج موسى صديق عيسى يجمع أيضًا مثل هؤلاء الرجال الآليين، أوجِد احتمال وجود رجال آليين بأربعة بألوان مختلفة في أول أربعة صناديق يفتحها موسى.

٤) لدى محمد قرصان مثلثا الشكل منتظمان. رقمت أجزاء القرص الأول بالأرقام ١، ٢، ٣، ورقّمت أجزاء القرص الثاني بالأرقام ٢، ٣، ٤
دوّر محمد القرصَين معًا، وقرأ الرقمَين الظاهرَين عند توقفهما:

أ أوجد احتمال أن يكون الفرق المطلق بين هذَين الرقمَين هو ١

ب دوّر محمد القرصَين معًا ١٥مرة. أوجِد احتمال أن لا يكون الفرق المطلق بين الرقمَين ١ في ثماني أو تسع محاولات من المحاولات الـ ١٥

٥) يولّد حاسوب أعدادًا عشوائية باستخدام الأرقام ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩. تظهر الأعداد على الشاشة بتجمعات كل منها من خمسة أرقام، مثل: $\boxed{٥٠١١٩}$، $\boxed{٢٦٣١٧}$ ، $\boxed{٤٠٠٦٨}$ .....
أوجِد احتمال أن:

أ لا يوجد الرقم ٧ في أول تجمع.

ب أول صفر يظهر في أول تجمع.

ج أول تسعة تظهر في التجمع الثاني.

٦) رُمي أربعة أحجار نرد منتظمة.

أ بكم طريقة يكون مجموع الأعداد الأربعة الظاهرة يساوي ٢٢؟

ب أوجِد احتمال أن يكون مجموع الأعداد الأربعة الظاهرة يساوي ٢٢

ج رُميت أحجار النرد الأربعة ثماني مرات. أوجِد احتمال أن يكون مجموع الأعداد الأربعة الظاهرة يساوي ٢٢ في رميتَين على الأقل.

٧) عندما يوقف سائق سيارة سيارته مساءً، فإن فرصة أن يتذكر إطفاء المصابيح الأمامية أو ينساها هي نفسها. أوجِد احتمال أن السائق في الـ ١٦ مرة القادمة سينسى إطفاء المصابيح عند إيقاف سيارته:

أ ١٤ مرة أكثر ممّا يتذكّر.

ب على الأقل ١٤ مرة أكثر ممّا يتذكّر.

٨) تراقب جميلة طلبة الجامعة. تشير البيانات إلى أن ٦٠٪ من الذكور و٧٠٪ من الإناث يضعون سمّاعات الهاتف في كلّ الأوقات. قررت أن تقابل بعض الطلبة المختارين عشوائيًا، من الذكور والإناث بالتناوب.

أ استخدم بيانات جميلة لتجد احتمال أن يكون أول طالب لا يضع سماعة هو ثالث ذكر تمّت مقابلته، إذا علمت أنها أول من قابلت هو:

١) ذكر.

٢) أنثى.

٣) ذكر يضع سماعة.

ب اكتب فرضية حول الذين يضعون سماعات من خلال إجابتك في الجزئية (أ).

٩) قيّم ١٣٪ من الزبائن أن الطعام في أحد المطاعم 'غير جيد'، و ٢٢٪ قيّموا أن الطعام 'مناسب'، و٦٥٪ قيّموا أن الطعام 'جيد'. أُخذت عيّنة عشوائيًا من ١٢ زبونًا من الذين يرتادون المطعم.

أ أوجِد احتمال أن يكون أكثر من ٢ وأقل من ١٢ قيّموا أن الطعام "جيد".

ب في مناسبة منفصلة اختيرت عيّنة عشوائيًا من (ن) زبونًا يرتادون المطعم. أوجِد أقل قيمة لـ (ن) بحيث يساوي احتمال وجود شخص واحد على الأقل يقيّم الطعام 'غير جيد'، أكثر من ٠,٩٥

١٠) احتمالية ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود غير منتظمة تساوي أربعة أمثال ظهور الكتابة. إذا رُميت قطعة النقود (ك) مرة بحيث يكون احتمال ظهور الكتابة مرة واحدة أكبر من ٩٩٪، فأوجِد أقل قيمة ممكنة لـ ك.

١١) إذا علمت أن س ~ ث (ن، ٠,٤)، ل(س = ١) = ك × ل(س = ن − ١)، فعبّر عن الثابت (ك) بدلالة (ن)، وأوجد أقل قيمة لـ ن التي يكون عندها ك > ٢٥

١٢) لاحظت دار نشر أن صفحة واحدة على الأقل من ثماني صفحات تحتوي على خطأ إملائي، وصفحة واحدة على الأقل من خمس صفحات تحتوي على خطأ في الترقيم، وأن هذه الأخطاء تحدث بشكل مستقلّ وعشوائي. اختبرت دار النشر ٤٨٠ صفحة اختيرت عشوائيًا من كتب مختلفة لملاحظة الأخطاء.

أ كم صفحة تتوقع أن تحتوي على الأقل خطأً واحدًا من كل نوع من الخطأَين؟

ب أوجِد احتمال أن:

١) يحدث أول خطأ إملائي بعد الصفحة العاشرة.

٢) يحدث أول خطأ في الترقيم قبل الصفحة العاشرة.

٣) الصفحة العاشرة هي الأولى التي تحتوي على نوعَي الخطأ.

١٣) يستخدم سلمان الحاسوب ليكون ٥ أعداد صحيحة من ١ إلى ٩

أ أوجِد احتمال أن يكون على الأقل اثنان من الأعداد الصحيحة الخمسة أقل من أو يساوي ٤

ب إذا أنتج سلمان ن عددًا صحيحًا عشوائيًا من ١ إلى ٩، وكان المتغير العشوائي (س) هو عدد الأعداد الصحيحة (ن) الأقل من أو تساوي (ك) (حيث ك عدد صحيح من ١ إلى ٩). إذا علمت أن التوقع للمتغير (س) يساوي ٩٦ وتباين س يساوي ٣٢ فأوجِد قيمة كل من (ن)، (ك).

الوحدة الحادية عشرة
الهندسة ثلاثية الأبعاد
3D Geometry

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١١-١ تتذكر تعريفات المصطلحات الهندسية التي تتعلق بالنقاط، والمستقيمات، والمستويات.

١١-٢ تقرأ النقطة، وتمثلها في المستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

١١-٣ تتعرف على المستويات سـ صـ، سـ ع، صـ ع، وتستخدمها.

١١-٤ تجد نقطة المنتصف، والمسافة بين نقطتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

١١-٥ تجد الزاوية بين مستقيمين، ومساحة شكل مستوي في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

١١-٦ تتذكر تعريفَي مسلّمة ونظرية.

١١-٧ تبرهن النظريات الثلاث المرتبطة بالعلاقات الهندسية بين النقاط، والمستقيمات، والمستويات، وتستخدمها.

- إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.
- يشكّل مستقيم معلوم، ونقطة خارجة عنه مستوى وحيد.
- المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيد.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثامن، الوحدة الثانية عشرة الصف العاشر، الوحدة الحادية عشرة	تستخدم نظرية فيثاغورث.	١) أوجِد طول الوتر في المثلث قائم الزاوية الذي فيه طولا أصغر ضلعَين ٥ سم، ١٢سم.
الصف التاسع، الوحدة السابعة، الصف الحادي عشر، الوحدة الخامسة	تجد نقطة المنتصف بين نقطتَين، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.	٢) أوجِد نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتَين: أ (٠، ٠)، (٤، ٣) ب (١، −٢)، (٩، ١٣)
الصف العاشر، الوحدة الثالثة عشرة	تستخدم قانوني الجيب وجيب التمام.	٣) أطوال أضلاع مثلث هي: ٩ سم، ١١سم، ١٠$\sqrt{2}$ سم. أوجِد قياس الزاوية المقابلة للضلع الأكبر في المثلث (مُقربًا الناتج لأقرب منزلة عشرية واحدة).

المفردات

البُعد dimension

النقطة point

المستقيم line

القطعة المستقيمة line segment

الرأس vertex

المستوى plane

الفضاء space

نقطة منتصف mid-point

المسافة distance

المسلّمة postulate

النظرية theorem

المسقط projection

المستقيمان المتخالفان skew lines

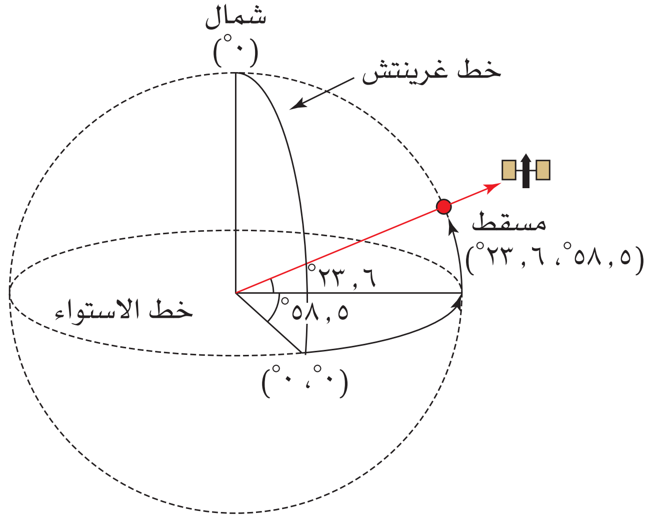
لماذا ندرس الهندسة ثلاثية الأبعاد؟

لأي مكان على سطح كوكب الأرض توجد إحداثيات تساعدنا على تحديد موقعه على خريطة العالم. النظام الإحداثي على سطح الأرض مكوّن من خطوط وهمية يُطلق عليها خطوط الطول ودوائر العرض.

خط الطول صفر هو 'خط غرينتش'، ودائرة العرض صفر هي 'خط الاستواء'، وهما خطّا الابتداء للنظام الإحداثي لسطح الأرض.

إحداثيات مدينة مسقط هي خط الطول ٥٨,٥° شرقًا، ودائرة العرض ٢٣,٦° شمالًا.

لتحديد موقع نقطة فوق مدينة مسقط مباشرة، كقمر صناعي مثلًا، نقدّم قياسًا ثالثًا يساعدنا على تحديد الموقع بدقة، وهذا القياس يمكن أن يكون البُعد من مركز الأرض أو البُعد عن مدينة مسقط، ويُقاس كلاهما على مسار المستقيم الأحمر في الشكل أدناه.



مُساعَدة

يمكن إيجاد الموقع الجغرافي لمدينة مسقط من خلال الرابط الآتي:
https://www.latlong.net/place/muscat-oman-1035.html

كما أن سائق السيارة يجب أن يكون على دراية جيدة بالأبعاد الثلاثة، خصوصًا عندما يقود سيارته أثناء أزمة سير أو عند القيادة إلى الخلف.

الفهم الجيد لهندسة الفضاء، والإلمام بالفضاء المحيط بنا مهم جدًا في هندسة العمارة، والإنشاءات، والتمثيل في ثلاثة أبعاد، وكذلك عندما نركب الدراجة أو نطلق طائرة ورقية.

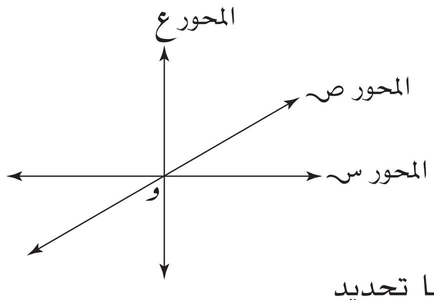
استكشف ١

ناقش مع زملائك في الفصل كيف يستخدم لاعب كرة التنس الهندسة ثلاثية الأبعاد على أرض الملعب، والسبب الذي يدفع ربان الطائرة في الفضاء لاستخدام الهندسة ثلاثية الأبعاد للإلمام بالرؤية الدقيقة.

١١-١ النظام الإحداثي ثُلاثيّ الأبعاد

درست سابقًا كيفية تحديد نقطة على ورقة في بُعدَين، وذلك برسم محورَي إحداثيات متعامدَين: المحور الأفقي (المحور السيني)، والمحور الرأسي (المحور الصادي).

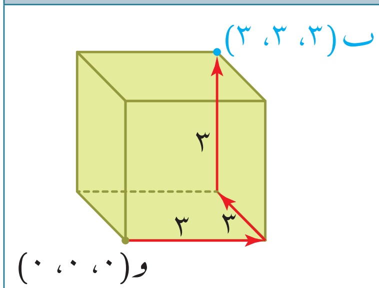
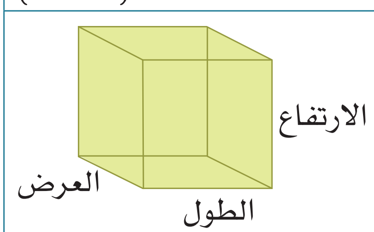
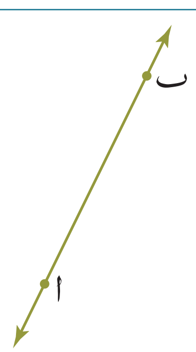
الهندسة ثلاثية الأبعاد هي: دراسة نقاط ومستقيمات ومستويات في نظام مكوّن من ثلاثة محاور متعامدة مع بعضها، وهي:



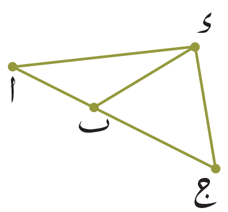
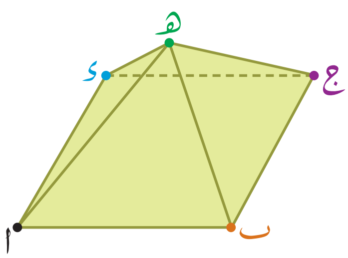
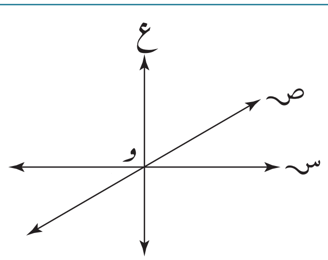
- المحور السيني (س).
- المحور الصادي (ص).
- محور الارتفاع (ع).

باستخدام مجموعة من القياسات الموجودة في اتجاهات المحاور الثلاثة، يمكننا تحديد نقطة المنتصف، وإيجاد المسافة بين نقطتَين، وحساب قياس الزوايا بين المستقيمات المتقاطعة، وإيجاد مساحة الأشكال المستوية.

فيما يلي تعريفات لبعض المصطلحات التي يشيع استخدامها في الهندسة ثلاثية الأبعاد مع رسم توضيحي لكل منها:

المصطلح	التعريف	الرسم التوضيحي
النقطة **point**	ترمز النقطة إلى موقع محدد في الفضاء. ليس لها أبعاد ولا يمكن تقسيمها. في الشكل المقابل: النقطة ب تبعد ٣ وحدات إلى يمين النقطة و، ثم ٣ وحدات إلى خلف النقطة و، ثم ٣ وحدات إلى الأعلى.	
البُعد **dimension**	هو مقدار قابل للقياس، ويمتد في اتجاه واحد. يتم استخدام الكلمات الطول، والعرض، والارتفاع للدلالة على قياسات ثلاثية الأبعاد.	
المستقيم **line**	هو مجموعة من النقاط تمتد إلى مالانهاية في اتجاهَين متعاكسَين، وهو شكل في بُعد واحد له طول وليس له عرض، كما أنه ليس له مساحة. من هنا يمكن القول إن المنحنى ليس مستقيمًا. في الشكل المقابل مستقيم يمر بالنقطتَين ا، ب.	

١٣٢

المصطلح	التعريف	الرسم التوضيحي
القطعة المستقيمة **line segment**	هي جزء متصل من مستقيم لها نقطتا بداية ونهاية، وطولها يساوي المسافة بين نقطتَي البداية والنهاية. يظهر الشكل المقابل قطعة مستقيمة واصلة بين النقطتَين ا، ب.	
على استقامة واحدة **collinear**	هو وصف لنقاط (نقطتَين أو أكثر) تقع على المستقيم نفسه. من خلال الشكل المقابل نلاحظ أن: النقاط ا، ب، ج، ى ليست على استقامة واحدة. النقاط ا، ب، ج على استقامة واحدة. النقطتان ا، ى على استقامة واحدة. النقطتان ب، ى على استقامة واحدة. النقطتان ج، ى على استقامة واحدة.	
الرأس **vertex**	هو نقطة تقاطع مستقيمَين أو أكثر. في الشكل المقابل، يوجد هرم لديه ٥ رؤوس تمّت الإشارة إليها بالرموز ا، ب، ج، ى، هـ.	
المستوى **plane**	هو شكل مسطح ثنائي الأبعاد يمتد في كلتا الجهتين إلى مالانهاية حيث تقعّره وسماكته صفر وطوله وعرضه لانهائي، والمستقيم المار بأي نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك المسطح. كما أن للمستوى مساحة، ولكن ليس له حجم. ومن الأمثلة على المستويات الهندسية أوجه كلّ من: المكعب ومتوازي المستطيلات والهرم. في حين تمثل الورقة والحائط وأرضية الغرفة وسقفها أمثلة من الحياة اليومية على المستويات.	
الفضاء (الفراغ) **Space**	هو امتداد ثلاثي الأبعاد يمكن فيه تحديد موقع جميع النقاط، وجميع الأشكال باستخدام ثلاثة محاور للإحداثيات.	

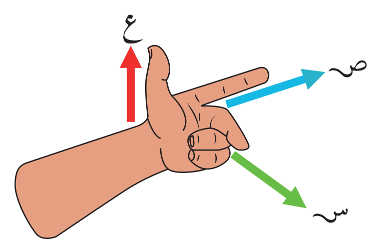
رسم المحاور وتحديد مواقع النقاط في الفضاء

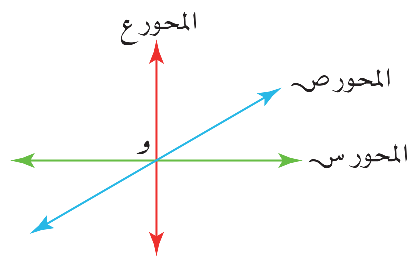
في النظام الإحداثي ثنائي الأبعاد، يحدد موقع نقطة ما بزوج مرتب (س، ص). الإحداثي السيني يمثل البُعد الأفقي والإحداثي الصادي يمثل البُعد الرأسي بالنسبة إلى نقطة ثابتة تُسمى نقطة الأصل.

يمكن توسعة فكرة النظام الإحداثي لتحديد موقع نقطة في المستوى، إلى تحديد موقع نقطة في الفضاء، حيث تمثل النقطة بثلاث إحداثيات مرتبة (س، ص، ع) وحيث المحور ع يُمثل الاتجاه العمودي على المحورين السيني والصادي معًا.

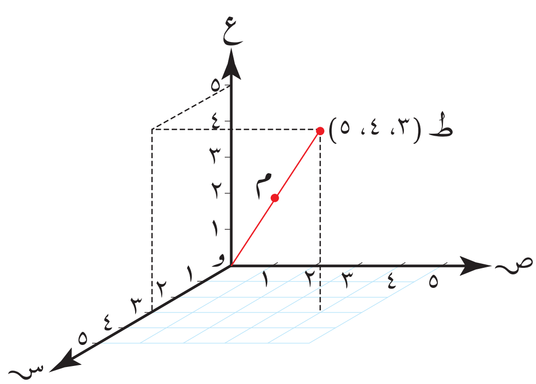
في هندسة الفضاء المحاور سـ، صـ، ع، تلتقي في نقطة الأصل (٠، ٠، ٠).

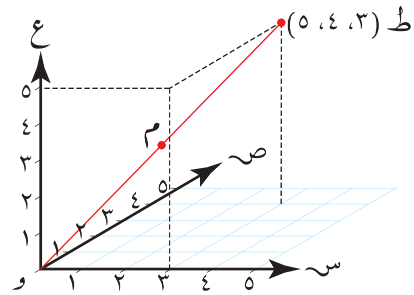
يبيّن الشكل أدناه المحاور سـ، صـ، ع والتي تذكرك بقاعدة اليد اليسرى التي درستها في مادة الفيزياء.





يمكن استخدام مجموعة المحاور لتحديد موقع أي نقطة في الفضاء نسبة إلى نقطة ثابتة تُسمى نقطة الأصل (و). يبيّن الشكلان أدناه طريقتَين لتمثيل النقطة ط (٣، ٤، ٥) على شبكة إحداثية ثلاثية الأبعاد، حيث م نقطة منتصف القطعة المستقيمة و ط.





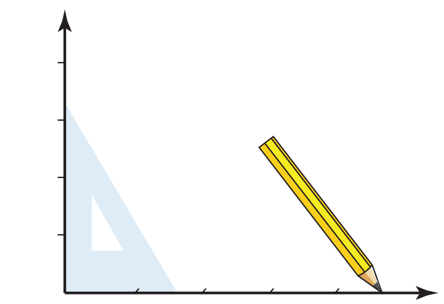
من المناسب دراسة الشكلَين أعلاه. قد تلاحظ كيف يظهر طول القطعة المستقيمة و ط مختلفًا في الشكلَين، لأننا ننظر إلى القطعة و ط من موقعَين مختلفَين.

تذكّر أن الرسوم ثلاثية الأبعاد نرسمها في مستويات ذات بُعدَين، أي على ورقة.

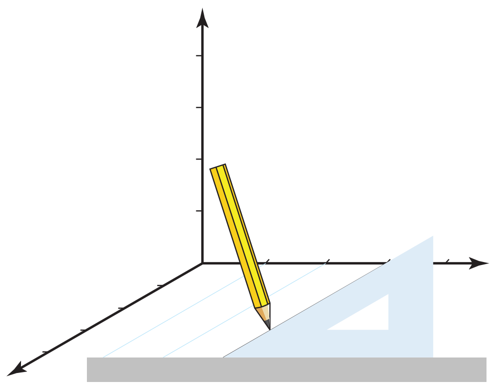
لنحدد موقع النقاط بدقة على المحاور سـ، صـ، ع عادة ما نرسم شبكة إحداثيات في المستوى سـ، صـ كما في الشكلَين السابقَين أعلاه.

لتحدد مثلًا موقع النقطة ط (١، ٢، ٣) بدقة، اتبع الخطوات أدناه:

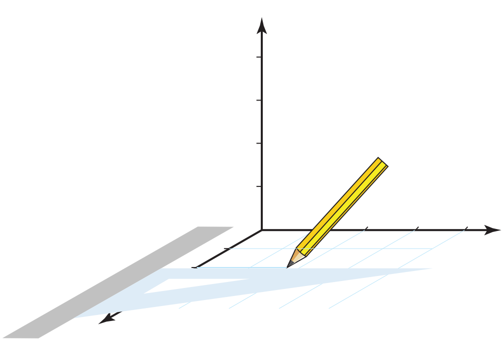
١) ارسم، ودرّج محورًا أفقيًا وآخر عموديًا.
استخدم المثلث القائم الزاوية لتتحقق من أن المحورين متعامدين.



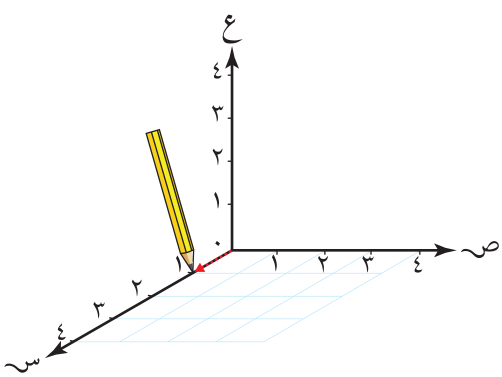
٢) ارسم، ودرّج محورًا ثالثًا مائلًا انطلاقًا من نقطة تقاطع المحورين المتعامدين.
ضع المثلث القائم الزاوية بحيث تكون الحافة المستقيمة المقابلة للزاوية القائمة موازية للمحور الثالث المائل.
مرّر المسطرة على طول الحافة المستقيمة، ثم ارسم خطًا رفيعًا موازيًا للمحور الثالث المائل عند كل علامة على المحور الأفقي.



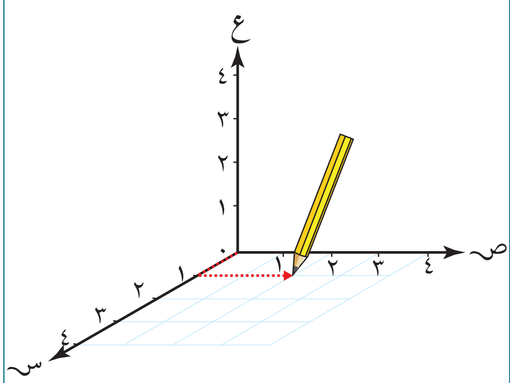
٣) ضع المثلث القائم الزاوية بحيث تكون الحافة المستقيمة المقابلة للزاوية القائمة موازية للمحور الأفقي. مرّر المسطرة على طول الحافة المستقيمة، ثم ارسم خطًا رفيعًا موازيًا للمحور الأفقي عند كل علامة على المحور المائل.



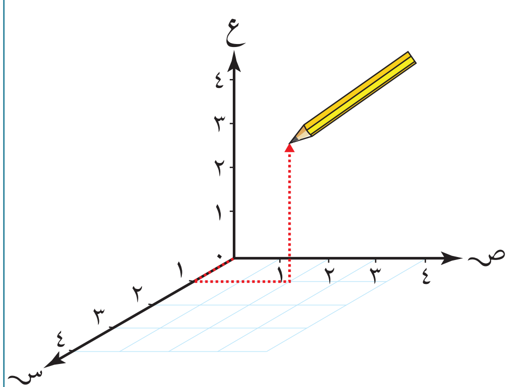
٤) سم المحاور س، ص، ع، ثم ضع الأعداد في كل محور. ابدأ من نقطة الأصل، ثم حرّك القلم على المحور السيني وصولًا إلى س = ١، القلم الآن عند النقطة (١، ٠، ٠).



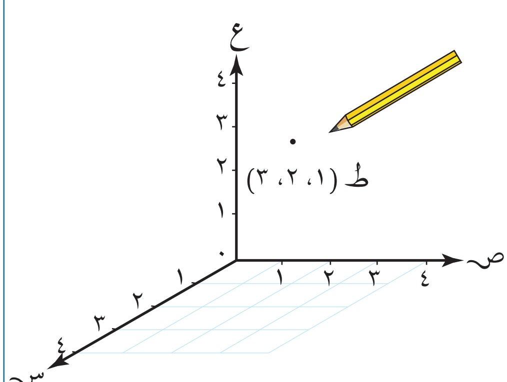
٥) حرّك القلم من س = ١ باتجاه موازٍ للمحور الصادي وصولاً إلى ص = ٢، القلم الآن عند النقطة (١، ٢، ٠).



٦) حرّك القلم باتجاه موازٍ للمحور ع بمقدار ثلاث وحدات الى الأعلى، يكون القلم قد وصل إلى النقطة (١، ٢، ٣).



٧) ضع إشارة على الموقع، وسمِّ النقطة طَ (١، ٢، ٣).



مُساعَدة

انتبه بشكل خاص للخطوة ٦، حيث تقاس المسافة الرأسية ٣ باستخدام المقياس المدرّج على المحور ع.
لن تظهر النقطة طَ عند مستوى القيمة ٣ على المحور ع، وذلك لأننا نقوم بتمثيل ثلاثة أبعاد على رسم ثنائي الأبعاد.

مستويات تتضمن زوجًا من المحاور

استكشف ٢

يبيّن الجدول الآتي إحداثيات ٩ نقاط في الفضاء:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
(٢، ٥، −٦)	(٠، ٢، ٠)	(−٣، ٠، ٤)	(٣، ٠، ٠)	(٤، ٣، −٢)	(٢، ٢، ٠)	(٠، ٠، ٧)	(٠، ١، ٥)	(١، ١، ١)

١) صنّف هذه النقاط في ثلاث مجموعات كالآتي:

المجموعة ١: تقع النقطة على محور من المحاور الثلاثة.

المجموعة ٢: لا تقع النقطة على أي من المحاور الثلاثة.

المجموعة ٣: يمكن رسم مستقيم يمر بالنقطة، ويتقاطع مع اثنَين من المحاور.

٢) بالاستناد إلى إحداثياتها، اشرح المشترك بين النقاط في كل مجموعة من المجموعات الثلاث.

في شبكة الإحداثيات ثلاثية الأبعاد يمكن تحديد عدد لا نهائي من النقاط، ورسم عدد لا نهائي من المستقيمات، وهناك أيضًا عدد لا نهائي من المستويات على الشبكة.

المستويات الثلاثة أدناه تتكوّن من أزواج محاور الإحداثيات.

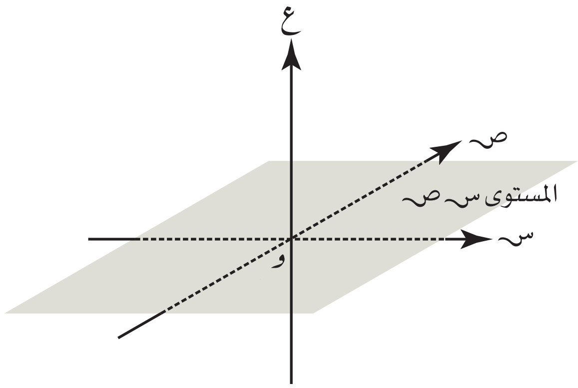
للمساعدة في حل مسائل في الهندسة ثلاثية الأبعاد، غالبًا ما نقوم **بإسقاط project** النقاط والمستقيمات على المستويات التي تحتوي على المحورين. يشبه إسقاط النقاط والمستقيمات على الأسطح المستوية إلقاء الظل على الأرض المستوية عندما تكون أشعة الشمس عمودية.

يبيّن الشكل المقابل جزءًا من المستوى الذي يتكوّن من المحورَين السيني والصادي.

جميع النقاط التي تقع في المستوى س ص يكون الإحداثي ع لها صفرًا.

مثلاً النقاط: (٠، ٠، ٠) ، (٧، ١، ٠) ، (−٣، −٨، ٠):

تقع جميعها في هذا المستوى.

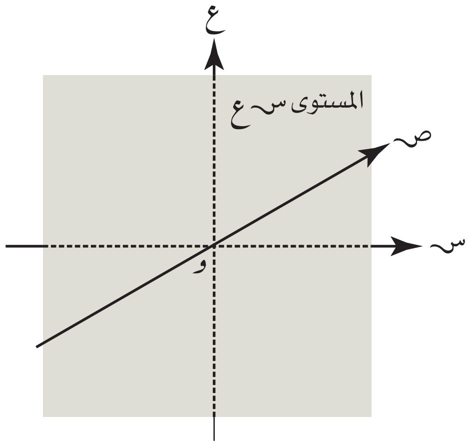


يبيّن الشكل المقابل جزءًا من مستوى يتكوّن من المحورين س، ع.

جميع النقاط التي تقع في المستوى س ع يكون الإحداثي الصادي لها صفرًا.

مثلاً النقاط: (٠، ٠، ٠) ، (٦، ٠، ٥) ، (−٩، ٠، −٤):

تقع جميعها في هذا المستوى.

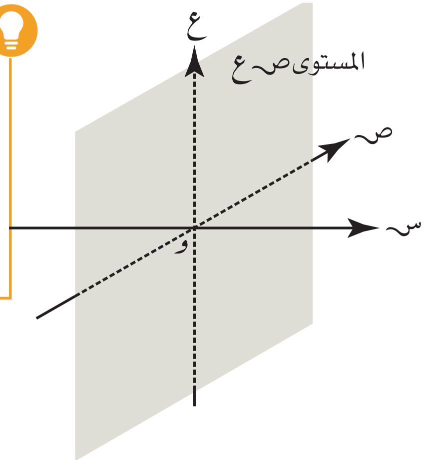


يبيّن الشكل المقابل جزءًا من مستوى يتكوّن من المحورَين ص، ع.

جميع النقاط التي تقع في المستوى ص ع يكون الإحداثي السيني لها : صفرًا.

مثلاً النقاط: (٠، ٠، ٠) ، (٠، ١، ٣) ، (٠، −٢، ١١):

تقع جميعها في هذا المستوى.

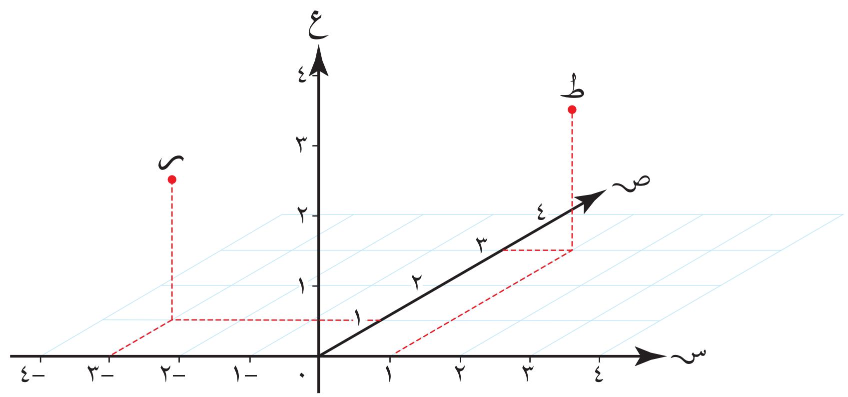


مُساعَدة

نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) هي النقطة الوحيدة التي تقع في المستويات الثلاثة. تتقاطع المستويات س ص، س ع، ص ع في نقطة الأصل.

مثال ١

يبيّن الشكل الآتي النقطتَين ط (١، ٣، ٢)، م (−٣، ١، ٢)، على نظام الإحداثيات س، ص، ع:



إذا رسم المستطيل ط ل م ن مع اتجاه عقارب الساعة، وموازيًا للمستوى س ص.

- **أ** أوجِد إحداثيات النقطتَين ل، ن.
- **ب** حدّد موقعَي النقطتَين ل، ن، وَأكمل رسم المستطيل ط ل م ن.
- **ج** أوجِد ثلاث نقاط تقع داخل المستطيل ط ل م ن، وإحداثياتها أعدادٌ صحيحة.
- **د** اكتب إحداثيات نقطتَين (إحداثياتها أعداد صحيحة) تقعان على محيط المستطيل ط ل م ن، والتي تقع على المستقيم نفسه مع النقاط الثلاث في الجزئية (ج).

الحـلّ:

أ الإحداثي ع لكل من النقطتَين ل، ن هو ٢

المستطيل ط ل م ن يوازي المستوى س ص، لذا يجب أن يكون الإحداثي ع للنقطتَين ل، ن متساويًا، ويساوي الإحداثي ع للنقطتَين ط، م.

الإحداثي السيني، والإحداثي الصادي للنقطة ل هما ١، ١ على الترتيب.

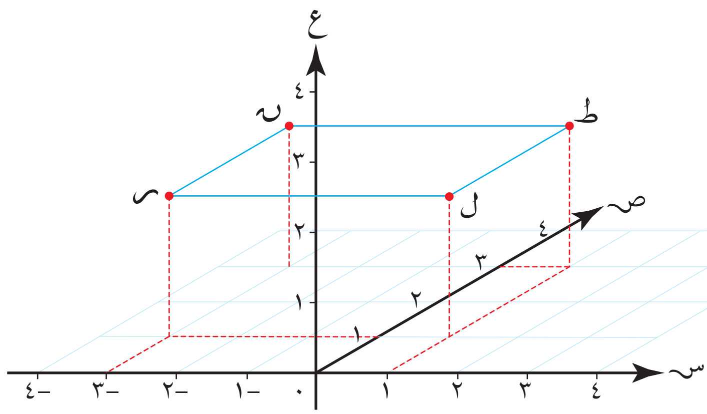
الإحداثي السيني للنقطة ل يساوي الإحداثي السيني للنقطة ط، والإحداثي الصادي لها يساوي الإحداثي الصادي للنقطة م.

الإحداثي السيني، والإحداثي الصادي للنقطة ں هما −٣، ٣ على الترتيب.

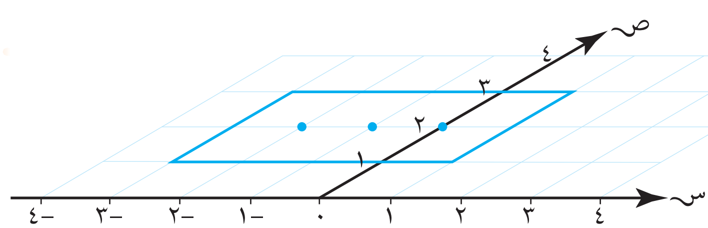
الإحداثي السيني للنقطة ں يساوي الإحداثي السيني للنقطة ﺳ، والإحداثي الصادي لها يساوي الإحداثي الصادي للنقطة ط.

فيكون ل (١، ١، ٢)، ں (−٣، ٣، ٢).

ب



ج



إذا أُسقط المستطيل ط ل ﺳ ں على المستوى س ص إلى الأسفل بمقدار وحدتَين نلاحظ ثلاث نقاط داخل المستطيل، وهي النقاط: (−٢، ٢، ٠)، (−١، ٢، ٠)، (٠، ٢، ٠).

النقاط في المستوى س ص هي: (−٢، ٢، ٠)، (−١، ٢، ٠)، (٠، ٢، ٠).

النقاط داخل المستطيل ط ل ﺳ ں هي: (−٢، ٢، ٢)، (−١، ٢، ٢)، (٠، ٢، ٢).

النقاط الثلاث داخل المستطيل ط ل ﺳ ں لها الإحداثيات نفسها السينية والصادية للنقاط الثلاث السابقة، لكن الإحداثي ع يساوي ٢

د إحداثيات النقطتين هي: (−٣، ٢، ٢)، (١، ٢، ٢).

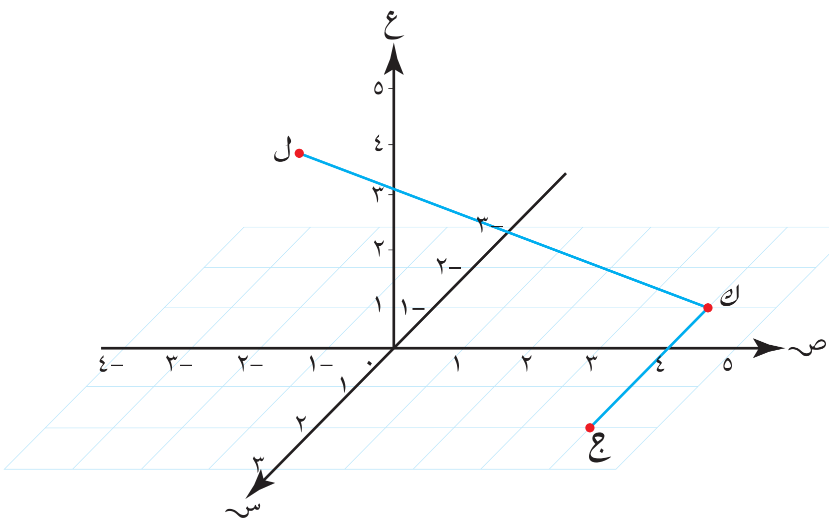
النقطتان هما نقطتا تلاقي المستقيم الذي يمر بالنقاط الثلاث في الجزئية (ج) مع محيط المستطيل ط ل ﺳ ں

مثـــال ٢

يبيّن الشكل أدناه ثلاثة رؤوس للمستطيل ع ك ل م:

إحداثيات الرؤوس الثلاثة ع (٢، ٤، ٠)، ك (–١، ٤، ٠)، ل (–١، –٢، ٣).

رُسمت القطعتان المستقيمتان ك ع، ك ل في الشكل.



أ أوجِد إحداثيات النقطة م.

ب على شبكة الإحداثيات حدّد موقع النقطة م، وأكمل رسم المستطيل ع ك ل م.

الحــلّ:

أ الإحداثي السيني للنقطة م هو ٢ — الإحداثي السيني للنقطة م هو الإحداثي السيني نفسه للنقطة ع.

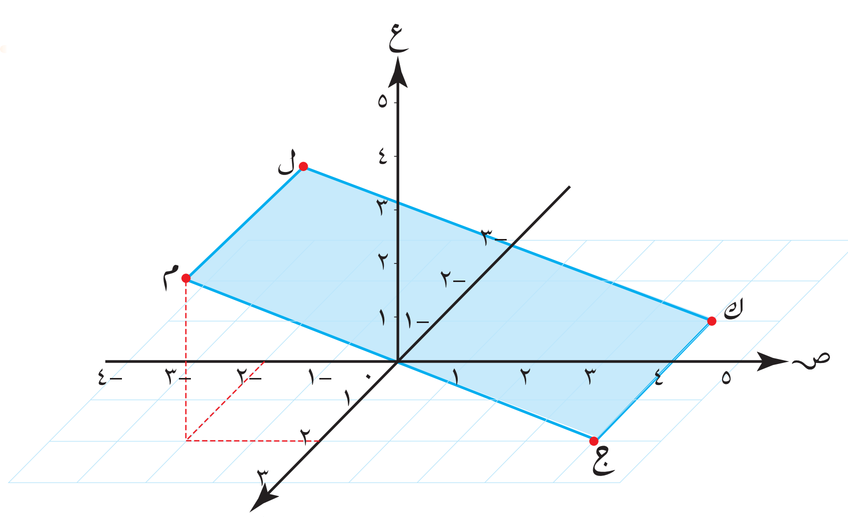
الإحداثي الصادي للنقطة م هو –٢ — الإحداثي الصادي للنقطة م هو الإحداثي الصادي نفسه للنقطة ل.

الإحداثي ع للنقطة م هو ٣ — الإحداثي ع للنقطة م هو الإحداثي ع نفسه للنقطة ل.

∴ إحداثيات م (٢، –٢، ٣).

ب

يتم رسم النقطة م عند (٢، –٢، ٣) والتي تبعد ٣ وحدات فوق النقطة (٢، –٢، ٠) في المستوى س ص



مثـــال ٣

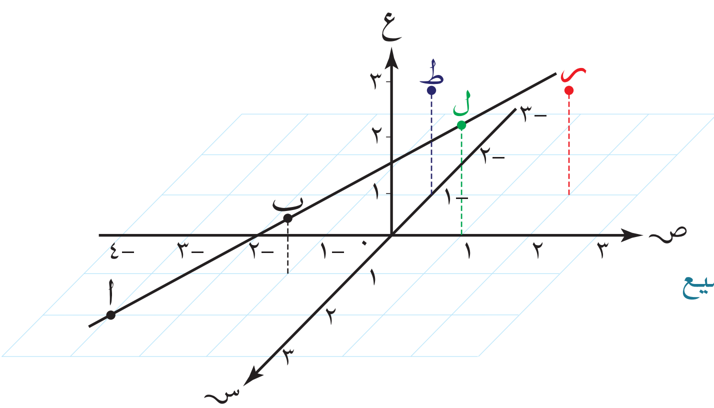
أ ارسم المحاور سـ، صـ، ع، ودرّج كلًا منها كما يلي:

−٣ ⩽ س ⩽ ٣ ، −٤ ⩽ ص ⩽ ٣، ٠ ⩽ ع ⩽ ٣

ب حدد موقعي النقطتَين ا(٢، −٣، ٠)، ب(١، −١، ١)

ج أي من النقاط الآتية ط(−١، ٠، ٢)، ل(٠، ١، ٢)، م(−١، ٢، ٢) تقع على استقامة واحدة مع ا ، ب؟

الحــلّ:



أ ارسم، ودرّج محاور الإحداثيات بدقة.

ب حدد موقع كل من النقطتَين ا، ب.

ج حدد موقع النقاط ط، ل، م على الرسم.

ارسم المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ا، ب، حيث يحتوي هذا المستقيم على جميع النقاط التي تقع على استقامة واحدة مع ا، ب.

تقع النقطة ل على استقامة واحدة مع النقطتَين ا، ب.

من الرسم، يمر المستقيم بالنقطة ل، لكنه لا يمر بالنقطتَين ط، م.

طريقة بديلة:

يمكن حل هذه الجزئية بدون الرسم، وذلك بملاحظة الخطوات من النقطة ا الى النقطة ب في اتجاهات كل من المحاور سـ، صـ، ع.

ا(٢، −٣، ٠) | الخطوة سـ = −١، الخطوة صـ = +٢، الخطوة ع = +١ | ← ب(١، −١، ١)

عند أخذ أي من مضاعفات هذه المجموعة من الخطوات، نصل إلى نقطة تقع على استقامة واحدة مع ا، ب:

ب(١، −١، ١) | الخطوة سـ = −١، الخطوة صـ = +٢، الخطوة ع = +١ | ← ل(٠، ١، ٢) | الخطوة سـ = −١، الخطوة صـ = +٢، الخطوة ع = +١ | ← (−١، ٣، ٣) | الخطوة سـ = −١، الخطوة صـ = +٢، الخطوة ع = +١ | ← (−٢، ٥، ٤)

النقطة ل (٠، ١، ٢) تقع على استقامة واحدة مع ا، ب.

تمارين ١١-١

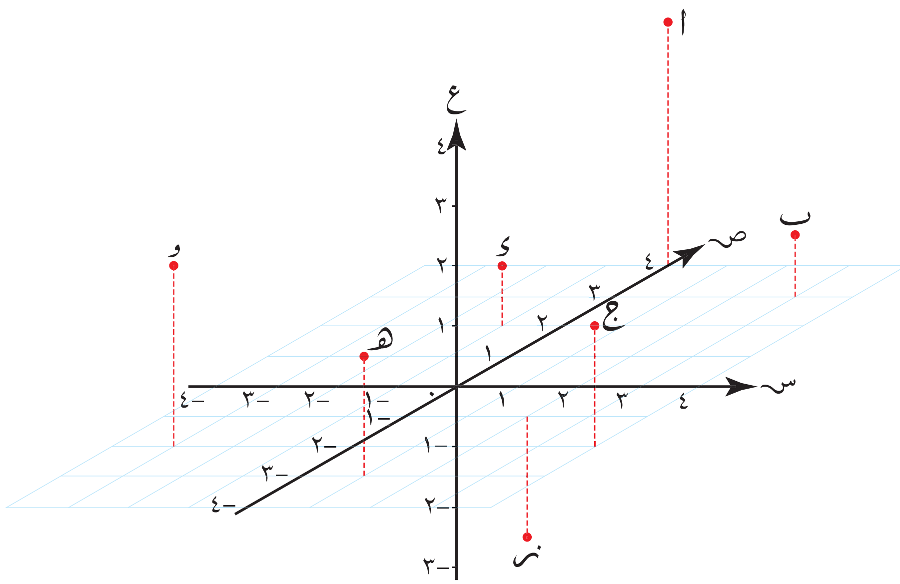
١) إحداثيات خمس نقاط هي: ا (٧، −٣، ٠)، ب (٤، ٠، −٢)، ج (−٨، ٠، ٠)، ى (١، ٢، ٣)، هـ (٠، ٤، −٥).

أ أيُّ هذه النقاط تقع في المستوى س ص؟

ب أيُّ هذه النقاط لا تقع في المستوى س ع؟

ج ما اسم المستوى الذي تقع فيه النقطة هـ؟

٢) اكتب إحداثيات النقاط ا، ب، ج، ى، هـ، و، ن المبينة في شبكة الإحداثيات الآتية:



٣) أ ارسم المحاور س، ص، ع، ودرّج كلًا منها من ٠ إلى ٥

ب حدّد مواقع النقاط ا (٠، ٠، ١)، ب (٢، ٢، ٥).

ج أيّ النقاط ط (٢، ١، ٥)، ل (١، ٢، ٣)، ن (١، ١، ٣) لا تقع على استقامة واحدة مع النقطتَين ا، ب؟

٤) أ ارسم المحورَين السيني والصادي، ودرّج كلًا منهما من ٠ إلى ٥، وارسم معهما المحور ع، ودرّجه من ٠ إلى ٦

ب مثّل النقاط ط (٣، ٠، ٠)، ل(٣، ٤، ٠)، ه (٠، ٠، ٦)، على نظام الإحداثيات المرسوم في الجزئية (أ).

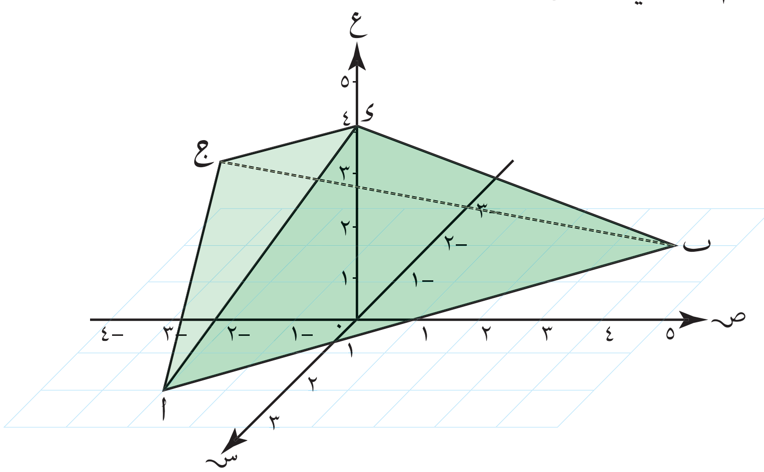
ج أوجِد إحداثيات النقطة ن بحيث يكون الشكل ط ل ن ه مستطيلًا.

د ما اسم الشكل الهندسي ط ل ت ه، إذا علمت أن ت (٠، ك، ٦)، حيث ١ < ك < ٣؟

٥) ثلاثة رؤوس في المستطيل ا ب ج ى هي: ا (٧، ٢، ٥)، ب (٧، ٦، ٥)، ى (−٢، ٢، ٨). ارسم شبكة إحداثيات لتجد إحداثيات النقطة ج.

٦) أوجِد الإحداثيات بأعداد صحيحة لأربع نقاط تقع في المستوى س ع، وتبعد كل منها وحدة واحدة عن النقطة ا (٥، ٠، ٤).

٧) يبيّن الشكل أدناه الهرم الثلاثي ا ب ج ى:

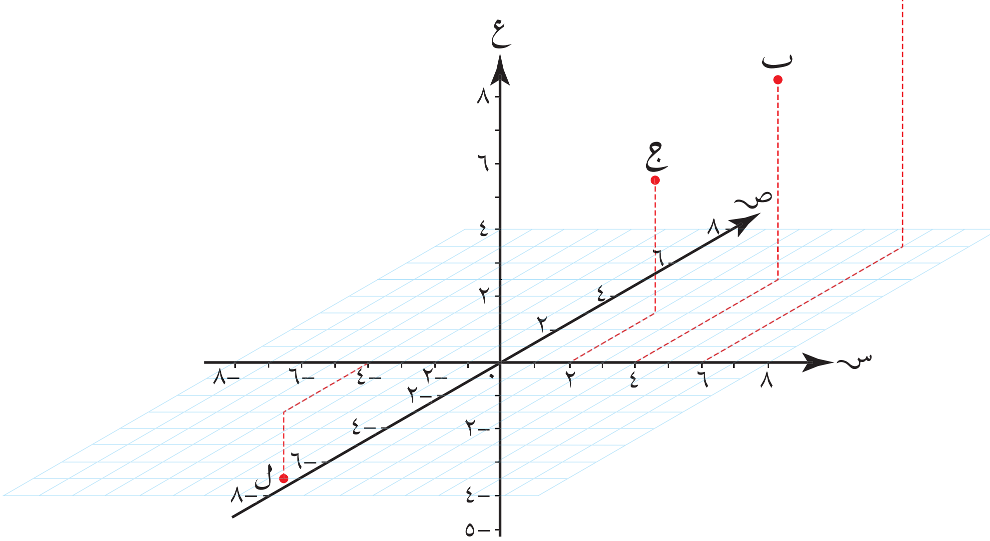


أ) اكتب إحداثيات الرؤوس ا، ب، ى.

ب) اكتب إحداثيات الرأس ج إذا علمت أنه يبعد وحدة واحدة أعلى المستوى س ص.

ج) أوجِد معادلة المستقيم ا ب في صورة ص = م س + جـ.

٨) يبيّن الشكل أدناه أربع نقاط هي: ا(٦، ٧، ٨)، ب، ج، ل:



أ) اكتب إحداثيات كل نقطة من النقاط ب، ج، ل إذا علمت أن ا، ب، ج، ل تقع على استقامة واحدة.

ب) إذا علمت أن النقطتَين ى، ف تقعان على القطعة المستقيمة الواصلة بين ا، ل ، فأوجِد إحداثيات:

١) ى إذا علمت أنها تقع في المستوى ص ع.

٢) ف إذا علمت أنها تقع في المستوى س ص.

ج) يمكن أن تصل من النقطة ى إلى النقطة ف بالتحرك وحدتَين بالاتجاه السالب لكل من المحاور الثلاثة.

استخدم هذه المعلومات لتصف موقع النقطة (−١، ٠، ١) بالنسبة إلى موقع كل من النقطتَين ى، ف.

١١-٢ نقطة المنتصف والمسافة بين نقطتَين في الفضاء

استكشف ٣

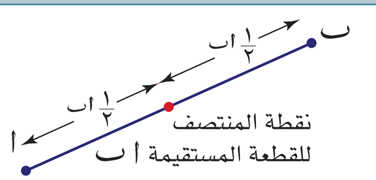
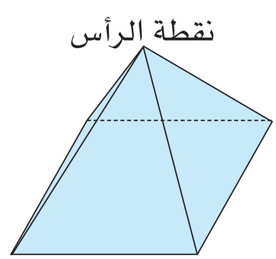
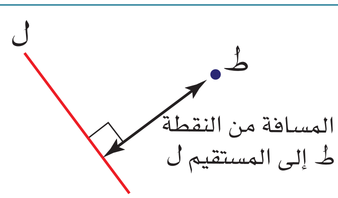
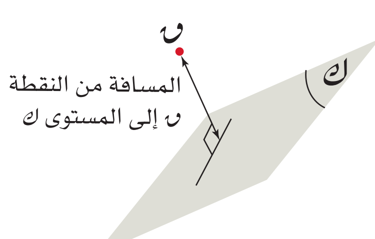
في التمرين ١ من تمارين ١١-١ سُئلت عن النقاط الخمس:

ا (٧، -٣، ٠) ، ب (٤، ٠، -٢) ، ع (-٨، ٠، ٠) ، ى (١، ٢، ٣) ، هـ (٠، ٤، -٥).

ناقش مع زملائك ما إذا كان ممكنًا أن تحدد أي النقاط هي الأقرب إلى نقطة الأصل من دون تحديد مواقع النقاط على شبكة الإحداثيات.

إذا اعتقدت أن ذلك ممكن، فاكتب النقاط في قائمة مرتبة مبتدئًا من أقرب نقطة إلى نقطة الأصل (٠، ٠، ٠).

فيما يلي تعريفات لبعض المصطلحات التي يشيع استخدامها في هذا الدرس مع رسم توضيحي لكل منها:

المصطلح	التعريف	الرسم التوضيحي
نقطة المنتصف midpoint	هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين نقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة.	
نقطة الرأس apex	هي أعلى نقطة في شكل ما، أو الرأس الأبعد عن القاعدة.	
المسافة بين نقطتَين distance between two points	هي أقصر بُعد بين نقطتين على مستقيم.	
المسافة بين نقطة ومستقيم distance from a point to a line	هي أقصر مسافة يتم قياسها بين النقطة والمستقيم.	
المسافة بين نقطة ومستوى distance from a point to a plane	هي طول العمود النازل من النقطة إلى المستوى.	

نقطة المنتصف

في الهندسة المستوية، الإحداثيّان السيني، والصادي لنقطة منتصف القطعة المستقيمة هما: الوسط الحسابي للإحداثيَّين السينيَّين والوسط الحسابي للإحداثيَّين الصاديَّين لنقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة.

فمثلًا: إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ط (٧ ، −٢)، ن (−٥، ٨) هي:

$$\left(\frac{٧+(-٥)}{٢}،\ \frac{-٢+٨}{٢}\right) = (١،\ ٣)$$

في هندسة الفضاء يمكن استخدام الأسلوب نفسه لإيجاد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة، كما هو موضح في النتيجة ١:

نتيجة ١

إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة حيث إحداثيات نهايتَيها هما $(س_١،\ ص_١،\ ع_١)$، $(س_٢،\ ص_٢،\ ع_٢)$ هي: $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢}،\ \frac{ص_١+ص_٢}{٢}،\ \frac{ع_١+ع_٢}{٢}\right)$.

مثــال ٤

إذا علمت أن و (٠، ٠، ٠)، ط (٦، −٤، ١١)، ن (١٤، ٨، $-\frac{٧}{٣}$)، فأوجِد إحداثيات منتصف كل قطعة من القطع المستقيمة الآتية:

أ) و ط

ب) و ن

ج) ط ن

الحــلّ:

أ) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{و ط}$ هي: $\left(\frac{٦}{٢}،\ \frac{-٤}{٢}،\ \frac{١١}{٢}\right) = \left(٣،\ -٢،\ \frac{١١}{٢}\right)$

يمكن أن نكتب الإجابة هكذا (٣، −٢، ٥,٥)

ب) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{و ن}$ هي: $\left(\frac{١٤}{٢}،\ \frac{٨}{٢}،\ \frac{-\frac{٧}{٣}}{٢}\right) = \left(٧،\ ٤،\ -\frac{٧}{٦}\right)$

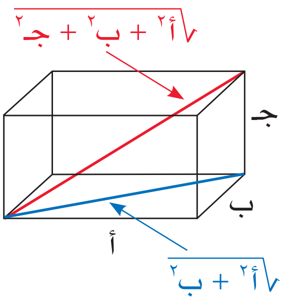
ج) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{ط ن}$ هي: $\left(\frac{١٤+٦}{٢}،\ \frac{٨+(-٤)}{٢}،\ \frac{-\frac{٧}{٣}+١١}{٢}\right)$

$$= \left(١٠،\ ٢،\ \frac{١٣}{٣}\right)$$

ليس مناسبًا أن تقرب الإحداثيات في إجابة الجزئيتَين (ب)، (ج): فالإحداثيات (٧، ٤، −١,١٧)، (١٠، ٢، ٤,٣٣) ليست إجابة دقيقة.

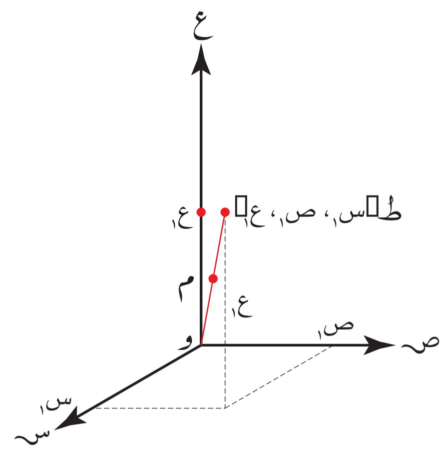
المسافة بين نقطتَين

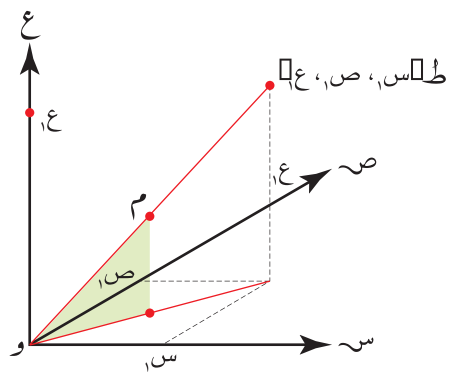
تعلّمت في وحدة حساب المثلثات في الصف العاشر، أن تستخدم نظرية فيثاغورث لتحل مسائل في الهندسة المستوية؛ وبإجراء تعديل بسيط يمكنك أن تستخدم نظرية فيثاغورث في هندسة الفضاء أيضًا.



يوضح الشكل المقابل أن طول أكبر قطر في متوازي المستطيلات الذي أبعاده أ، ب، جـ وحدة هو $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$ وحدة.

يبيّن الشكلان أدناه رسمَين لقطعة مستقيمة رُسمت من نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) إلى النقطة ط $(\text{س}_1، \text{ص}_1، \text{ع}_1)$، م هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة و ط:





مُساعَدة

يمكن استخدام برمجيات موقع Geogebra لرسم أشكال ثنائية الأبعاد أو ثلاثية الأبعاد.

موقع آخر يساعد على ذلك هو Tinkercad

نستخدم نظرية فيثاغورث لنجد طول المسافة بين النقطتَين و، ط:

و ط $= \sqrt{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2 + \text{ع}_1^2}$.

المسافة من النقطة و إلى منتصف القطعة المستقيمة م تساوي نصف طول القطعة المستقيمة و ط، فيكون:

$$\text{و م} = \sqrt{\left(\frac{\text{س}_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ص}_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{ع}_1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2 + \text{ع}_1^2\right)}$$

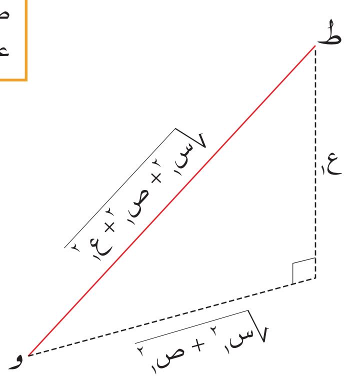
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2 + \text{ع}_1^2\right)}$$

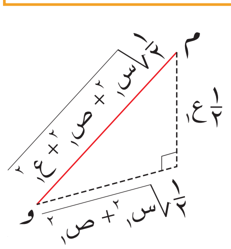
$$= \frac{1}{2}\ \text{و ط}$$

مُساعَدة

مسقط القطعة المستقيمة على مستوى هو: القطعة المستقيمة المحصورة بين موقعي العمودين النازلين من طرفي القطعة المستقيمة على المستوى.

باستخدام تشابه المثلثَين في الشكلين أعلاه، حيث أُسقطت القطعتان و م، و ط رأسيًا على المستوى س ص.





مما سبق، يمكننا التوصل إلى نتيجة ٢ الآتية:

نتيجة ٢

طول القطر الأكبر في متوازي المستطيلات الذي أبعاده أ، ب، ج وحدة يساوي $\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢}$ وحدة.

- للقطعة المستقيمة الواصلة بين ا (س$_١$، ص$_١$، ع$_١$)، ب (س$_٢$، ص$_٢$، ع$_٢$) ونقطة المنتصف لها م، يكون:

$$ا ب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢ + (ع_١ - ع_٢)^٢}$$

- $ا م = م ب = \frac{١}{٢} ا ب = \frac{١}{٢}\sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢ + (ع_١ - ع_٢)^٢}$

مثــال ٥

إذا علمت أن النقطة م منتصف القطعة المستقيمة ط ن، حيث ط (٥، −٢، ٣)، ن (٧، ٦، −١١)، فأوجد (لأقرب منزلتين عشريتين):

أ إحداثيات النقطة م.

ب البُعد بين نقطة الأصل والنقطة م.

ج طول القطعة المستقيمة ط ن.

د طول القطعة المستقيمة ط م.

الحــلّ:

أ إحداثيات النقطة م هي: $\left(\frac{٥ + ٧}{٢}، \frac{-٢ + ٦}{٢}، \frac{٣ + (-١١)}{٢}\right) = (٦، ٢، -٤)$

ب $و م = \sqrt{٦^٢ + ٢^٢ + (-٤)^٢}$

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء مع إحداثيات النقطة م

$= \sqrt{٣٦ + ٤ + ١٦}$

$= \sqrt{٥٦}$

$= ٢\sqrt{١٤} = ٧{,}٤٨$ وحدة.

ج $ط ن = \sqrt{(٥ - ٧)^٢ + (-٢ - ٦)^٢ + (٣ - (-١١))^٢}$

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء.

$= \sqrt{٤ + ٦٤ + ١٩٦}$

$= \sqrt{٢٦٤}$

$= ٢\sqrt{٦٦} = ١٦{,}٢٥$ وحدة.

د ∵ النقطة م منتصف القطعة المستقيمة ط ن،

∴ $ط م = \frac{١}{٢} ط ن$

$= \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٦٦}$

$= ٨{,}١٢$ وحدة

طريقة بديلة: نعلم أن ط (٥، −٢، ٣)، م (٦، ٢، −٤).

$ط م = \sqrt{(٥ - ٦)^٢ + (-٢ - ٢)^٢ + (٣ - (-٤))^٢}$

$= \sqrt{١ + ١٦ + ٤٩}$

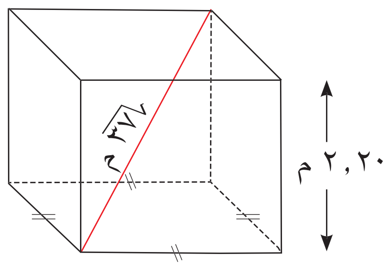
$= \sqrt{٦٦} = ٨{,}١٢$ وحدة.

مُساعَدة

عندما نحسب المسافة بين نقطتَين فإن الترتيب الذي نطرح فيه الإحداثيات س، ص، ع ليس مهمًا لأننا نربّع هذه الفروق. فمثلًا: $(٥ - ٩)^٢ = (٩ - ٥)^٢ = ١٦$

مثـــال ٦

غرفة على شكل متوازي مستطيلات، قاعدتها وسقفها مربع الشكل، والمسافة بينهما ٢,٢٠ م. إذا كان طول أكبر قطر في الغرفة $\sqrt{٣٧}$ م، فأوجِد مجموع أطوال أضلاع الغرفة الـ ١٢ مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.



الحــلّ:

لنفرض أن طول ضلع المربع هو س.

$س^٢ + س^٢ + (٢,٢٠)^٢ = (\sqrt{٣٧})^٢$ .... استخدم قانون طول أكبر قطر.

$٢س^٢ + ٤,٨٤ = ٣٧$

$س^٢ = \frac{٣٧ - ٤,٨٤}{٢}$

س = $\sqrt{١٦,٠٨}$ م.

مجموع أطوال الأضلاع = ٨ × $\sqrt{١٦,٠٨}$ + ٤ × ٢,٢٠ .... ثمانية من الأضلاع طول كل منها $\sqrt{١٦,٠٨}$ وأربعة أضلاع طول كل منها ٢,٢ م

= ٤٠,٨٨ م.

تمارين ١١-٢

١) أوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية:

أ (١٢، –٦، ٥) ، (٠، ٠، ٠)

ب (٩، ٥، ٢) ، (١١، –٧، ٨)

ج (٤، –١٣، ٢) ، (–٤، ١٥، –٣)

٢) إذا علمت أن إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ط ن هي (٣، –٥، ٢)، وإحداثيات ط (٧، ٠، –٤)، فأوجِد:

أ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين ط، ونقطة الأصل.

ب إحداثيات النقطة ن.

٣) أوجِد المسافة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية:

أ (٠، ٠، ٠) ، (٠، ٥، ٠)

ب (٣، ٢، ١) ، (–١، ٢، ١)

ج (٦، –٢، –٥) ، (٦، –٢، ٥)

٤) أوجِد المسافة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية (مقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتين عشريتين):

أ (٢، ٥، ٤) ، (٤، ١، ٧)

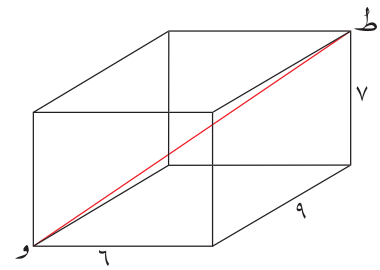
ب (١، ٢، −١) ، (٦، ٣، ١)

ج (−٤، ٦، −٥) ، (٣، ٢، ٤)

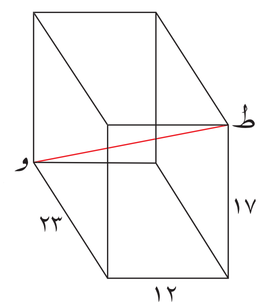
٥) يبيّن كل شكل من الأشكال أدناه منشورًا قاعدته مستطيلة، والقطر الأكبر فيه هو $\overline{\text{وط}}$.

أوجِد طول $\overline{\text{وط}}$ مقربًا إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

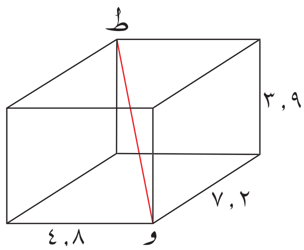
أ



ب



ج



٦) أوجِد طول أكبر قطر لكل ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ مكعب طول ضلعه ١ سم.

ب مكعب طول ضلعه ٨ سم.

ج متوازي مستطيلات ارتفاعه ١٠ سم، وقاعدته مربع طول ضلعه ٦ سم.

د متوازي مستطيلات أبعاده ١,٢ سم، ٣,٤ سم، ٥,٦ سم.

٧) أوجد إحداثيات نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتَين مما يأتي:

أ (٥، ٨، ١٢) ، (٧، ٤، ٠)

ب (١، ١١، −٣) ، (٧، −١، ٣)

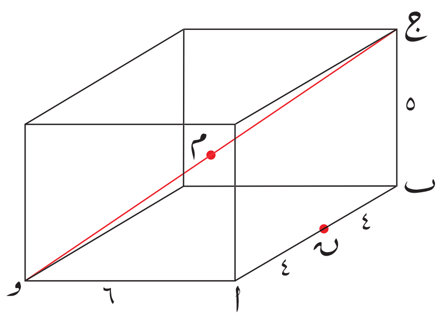
ج (٨، −٥، ٦) ، (١١، −٨، −٢)

د ($\frac{٣}{٤}$، $\frac{٤}{٣}$، −١) ، (−$\frac{١١}{٢}$، $\frac{٣}{٢}$، ٠)

٨) بُعدا قاعدة متوازي مستطيلات ١٥ سم، ١٣ سم. إذا كان طول أكبر قطر فيه $\sqrt{٨٣٥}$ سم، فأوجِد ارتفاعه.

٩) صندوق مكعب الشكل حجمه ٢٦٢,٤٤١ سم^{٣}. أوجِد طول أكبر قطر فيه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

١٠) في متوازي المستطيلات المقابل: م منتصف القطر و ج،
حيث و ا = ٦ سم، ا ن = ن ب = ٤ سم، ب ج = ٥ سم.
رُسِم الشكل على نظام إحداثيات س، ص، ع،
بحيث كان و (٠، ٠، ٠)، ا على المحور السيني الموجب،
$\overline{\text{ج ب}}$ يوازي المحور ع.



أ ما المحور الذي توازيه $\overline{\text{ا ب}}$؟

ب أوجِد إحداثيات كل نقطة من النقاط الآتية:

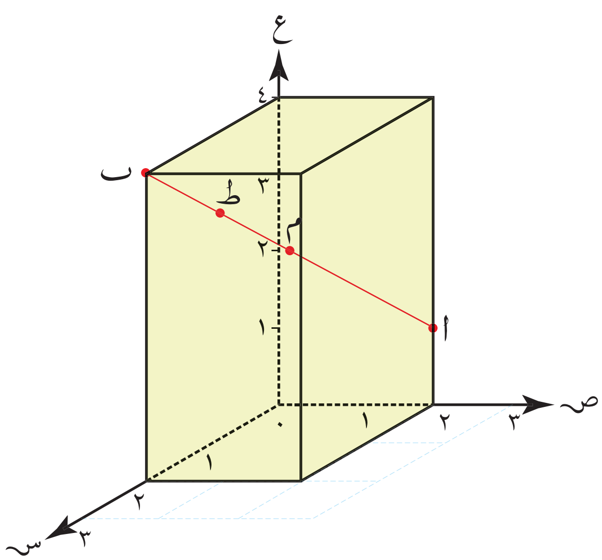
١) ا ٢) ب ٣) ج ٤) م

ج إذا قرّبت كل ناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين، فاحسب المسافة من:

١) و إلى ج ٢) م إلى و

٣) م إلى ا ٤) ن إلى م

١١) على نظام الإحداثيات مُثّل متوازي مستطيلات
ارتفاعه ٤ وحدات، وطول أضلاع قاعدته وحدتان.
إذا علمت أن م منتصف القطعة المستقيمة ا ب،
ط منتصف القطعة المستقيمة م ب، حيث
إحداثيات ا (٠، ٢، ١)، ب (٢، ٠، ٤).
فأوجِد طول كل من:



أ $\overline{\text{ا ب}}$

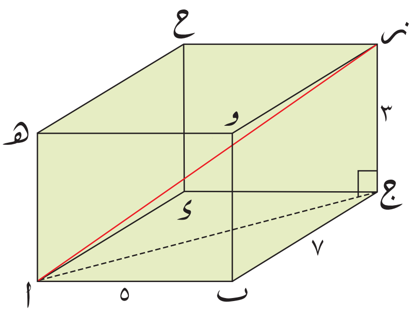
ب $\overline{\text{ا م}}$

ج $\overline{\text{ا ط}}$

١١-٣ الزوايا والمساحات في الفضاء

درست سابقًا كيفية إيجاد أطوال المستقيمات المتقاطعة، ويمكننا أن نستخدم علم المثلثات لحساب قياس الزوايا بين هذه المستقيمات، إضافة إلى مساحة الأشكال المستوية المحصورة بين ثلاثة أو أربعة مستقيمات متقاطعة، وستستخدم في هذا الدرس حل المثلثات وإيجاد: قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع والمساحات في الفراغ كما يتضح من الأمثلة الآتية.

مثال ٧



يبيّن الشكل المقابل متوازي مستطيلات أبعاده ٥ سم، ٧ سم، ٣ سم. أوجد:

أ طول القطر الأكبر $\overline{\text{أ ز}}$ مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب قياس الزاوية بين القطر الأكبر $\overline{\text{أ ز}}$، وقطر القاعدة $\overline{\text{أ ج}}$.

الحــلّ:

أ (أ ج)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب ج)^{٢} ...... (١)

(أ ز)^{٢} = (أ ج)^{٢} + (ج ز)^{٢} .... (٢)

المثلث أ ب ج قائم الزاوية في قاعدة متوازي المستطيلات.
المثلث أ ج ز قائم الزاوية موجود داخل متوازي المستطيلات وتره هو القطر الأكبر $\overline{\text{أ ز}}$ ($\overline{\text{أ ج}}$ مسقط $\overline{\text{أ ز}}$ على القاعدة أ ب ج د).

(أ ز)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب ج)^{٢} + (ج ز)^{٢}

أ ز = $\sqrt{\text{(أ ب)}^{٢} + \text{(ب ج)}^{٢} + \text{(ج ز)}^{٢}}$

= $\sqrt{٥^{٢} + ٧^{٢} + ٣^{٢}}$

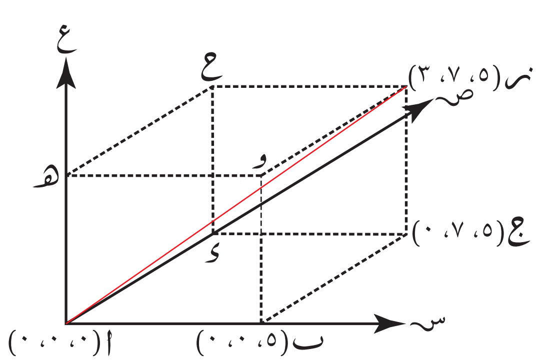
= $\sqrt{٨٣}$

= ٩,١١ سم.

عوّض عن المعادلة (١) في المعادلة (٢) لتحل مكان (أ ج)^{٢}.
يبيّن ذلك أنه ليس ضروريًا أن تحسب طول $\overline{\text{أ ج}}$.
إن عدم حساب طول $\overline{\text{أ ج}}$ مباشرة يجنّبك حصول خطأ غير ضروري عند التقريب.

طريقة بديلة:

يمكن حل الجزئية (أ) بأن ترسم متوازي المستطيلات على شبكة الإحداثيات بحيث تقع أ عند نقطة الأصل، ب (٥، ٠، ٠)، ج (٥، ٧، ٠)، ز (٥، ٧، ٣) وهكذا، كما هو موضح أدناه:



أ ن يمثل البعد بين نقطة الأصل والنقطة (٥، ٧، ٣)

$$\text{أ ن} = \sqrt{(٥ - ٠)^{٢} + (٧ - ٠)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}}$$
$$= \sqrt{٥^{٢} + ٧^{٢} + ٣^{٢}}$$
$$= \sqrt{٨٣}$$

= ٩,١١ سم.

ب جا(ن $\hat{\text{أ}}$ ع) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{أ ن}}$

$= \frac{٣}{\sqrt{٨٣}}$

ق (ن $\hat{\text{أ}}$ ع) = جا$^{-١}$ $\frac{٣}{\sqrt{٨٣}}$

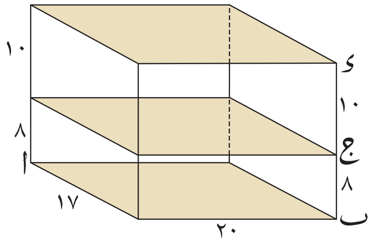
= ١٩,٢°

من خلال متوازي المستطيلات نجد أن الزاوية ن $\hat{\text{أ}}$ ع هي الزاوية أ المحصورة بين $\overline{\text{أ ن}}$، $\overline{\text{أ ع}}$.
المثلث أ ع ن قائم الزاوية في ع.
استخدم معكوس الجيب لتجد ق(ن $\hat{\text{أ}}$ ع).

يمكنك إيجاد ق(ن $\hat{\text{أ}}$ ع) باستخدام ظل الزاوية أو جيب التمام مع طول الضلع أ ن.

مثـــال ٨

يبيّن الشكل المقابل طاولة مكوّنة من ثلاثة أسطح مستطيلة متطابقة (القياسات معطاة بالسنتيمتر). أوجِد:



أ المسافة مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:
١) من أ إلى ج.
٢) من أ إلى ى.

ب قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{أ ج}}$، $\overline{\text{أ ى}}$ مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

الحـــلّ:

أ ١) أ ج = $\sqrt{١٧^{٢} + ٢٠^{٢} + ٨^{٢}}$

$= \sqrt{٧٥٣}$

= ٢٧,٤٤ سم.

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء لتجد المسافة من أ (٠، ٠، ٠) إلى ج (١٧، ٢٠، ٨).

٢) أ ى = $\sqrt{١٧^{٢} + ٢٠^{٢} + ١٨^{٢}}$

$= \sqrt{١٠١٣}$

= ٣١,٨٣ سم.

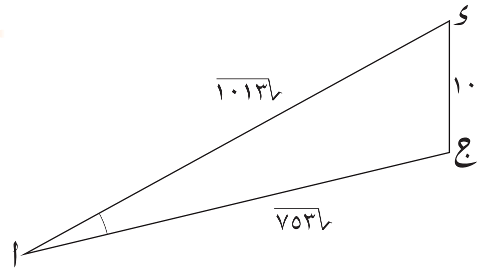
استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء لتجد المسافة من أ (٠، ٠، ٠) إلى ى (١٧، ٢٠، ١٨).

مُساعَدة

في المثلث أ ب ج ينص قانون جيب التمام على

$\text{جتا}(\text{أ}) = \dfrac{(\text{ب}')^{٢} + (\text{ج}')^{٢} - (\text{أ}')^{٢}}{٢\text{ب}'\,\text{ج}'}$

ب



الزاوية بين أ ج، أ ء هي ج أ̂ ء، المشار إليها في الشكل المقابل. لتتجنب خطأ التقريب، عوض عن طولَي أ ج، أ ء بدون تقريب.

$\text{جتا}\,(\text{ج}\hat{\text{أ}}\text{ء}) = \dfrac{\text{ج}'^{٢} + \text{ء}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{٢\,\text{ج}'\,\text{ء}'}$

$= \dfrac{(\sqrt{١٠١٣})^{٢} + (\sqrt{٧٥٣})^{٢} - ١٠^{٢}}{٢\sqrt{١٠١٣} \times \sqrt{٧٥٣}}$

$= \dfrac{١٠١٣ + ٧٥٣ - ١٠٠}{٢\sqrt{١٠١٣} \times ٧٥٣}$

$= \dfrac{٨٣٣}{\sqrt{٧٦٢٧٨٩}}$

∵ المثلث أ ج ء ليس قائم الزاوية، استخدم قانون جيب التمام حيث أ′ =١٠، ج′ = $\sqrt{١٠١٣}$، ء′ = $\sqrt{٧٥٣}$

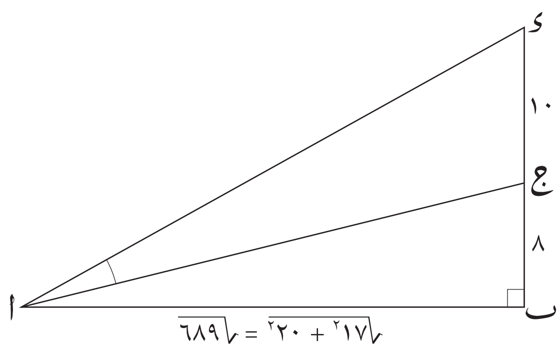
$\text{ق}\,(\text{ج}\hat{\text{أ}}\text{ء}) = \text{جتا}^{-١}\left(\dfrac{٨٣٣}{\sqrt{٧٦٢٧٨٩}}\right)$

$= ١٧{,}٥°$

استخدم معكوس جيب التمام لتجد ق (ج أ̂ ء).

طريقة بديلة:

ق (ج أ̂ ء) يساوي الفرق بين قياسَي الزاويتين ب أ̂ ء، ب أ̂ ج.



$\text{ق}\,(\text{ج}\hat{\text{أ}}\text{ء}) = \text{ق}\,(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{ء}) - \text{ق}\,(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{ج})$

$= \text{ظا}^{-١}\dfrac{١٨}{\sqrt{٦٨٩}} - \text{ظا}^{-١}\dfrac{٨}{\sqrt{٦٨٩}}$

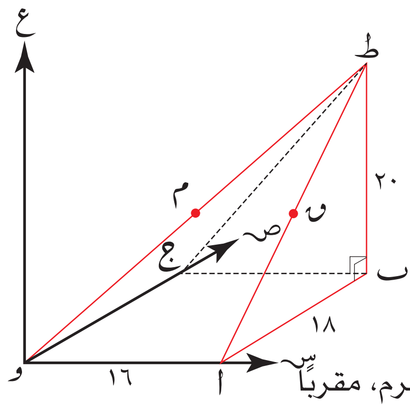
$= ١٧{,}٥°$

∵ المثلثان أ ب ء، أ ب ج قائما الزاوية في ب.

∴ نستخدم النسبة المثلثية ظل الزاوية.

مثـــال ٩

في الشكل المقابل هرم قاعدته مستطيلة تقع في المستوى س ص.
أبعادها ١٦ × ١٨ وحدة، وطول العمود النازل عليها من الرأس ط يساوي ٢٠ وحدة.
النقطة م هي نقطة منتصف $\overline{\text{و ط}}$، النقطة ن هي نقطة منتصف $\overline{\text{أ ط}}$، النقطة و (٠، ٠، ٠)



أ أوجِد المسافة بين النقطتين م، ن.

ب أوجِد مجموع أطوال الأضلاع الثمانية للهرم، مقرباً إلى أقرب منزلتين عشريتَين.

ج إذا علمت أن قياس الزاوية بين $\overline{\text{و ط}}$، $\overline{\text{و ب}}$ يساوي جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٢٩}}{ك}$. فأوجِد قيمة العدد الصحيح ك.

الحــلّ:

أ إحداثيات النقطة م $\left(\frac{١٦}{٢}، \frac{١٨}{٢}، \frac{٢٠}{٢}\right)$ = (٨، ٩، ١٠)

إحداثيات النقطة ن $\left(\frac{٣٢}{٢}، \frac{١٨}{٢}، \frac{٢٠}{٢}\right)$ = (١٦، ٩، ١٠)

م ن = $\sqrt{(١٦ - ٨)^٢ + (٩ - ٩)^٢ + (١٠ - ١٠)^٢}$

= ٨ وحدات.

ب محيط القاعدة = ٢(١٦ + ١٨)

= ٦٨ وحدة.

مجموع الأطوال =
محيط القاعدة + ب ط + ا ط + ج ط + و ط

ب ط = ٢٠

ا ط = $\sqrt{١٨^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٧٢٤}$ = ٢$\sqrt{١٨١}$

ج ط = $\sqrt{١٦^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٦٥٦}$ = ٤$\sqrt{٤١}$

و ط = $\sqrt{١٦^٢ + ١٨^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٩٨٠}$ = ٢$\sqrt{٢٤٥}$ = ١٤$\sqrt{٥}$

مجموع الأطوال = ٦٨ + ٢٠ + ٢$\sqrt{١٨١}$ + ٤$\sqrt{٤١}$ + ١٤$\sqrt{٥}$

= ١٧١٫٨٢ وحدة.

مُساعَدة

أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث ب و ط معطاة، لذا يمكن استخدام الجيب، جيب التمام أو الظل لإيجاد ن(ب وَ̂ ط).

ج $ن(ب\hat{و}ط) = جتا^{-١}\dfrac{وب}{وط}$

$وب = \sqrt{١٦^{٢} + ١٨^{٢}} = \sqrt{٥٨٠} = ٢\sqrt{١٤٥}$

$وط = \sqrt{١٦^{٢} + ١٨^{٢} + ٢٠^{٢}} = \sqrt{٩٨٠} = ٢\sqrt{٢٤٥}$

$ن(ب\hat{و}ط) = جتا^{-١}\dfrac{٢\sqrt{١٤٥}}{٢\sqrt{٢٤٥}}$

$= جتا^{-١}\sqrt{\dfrac{١٤٥}{٢٤٥}}$ ... استخدم $\dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\dfrac{أ}{ب}}$

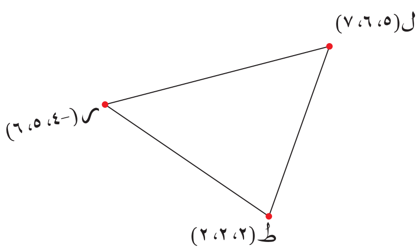
$= جتا^{-١}\sqrt{\dfrac{٢٩}{٤٩}}$ ... الصورة الأبسط للكسر $\dfrac{١٤٥}{٢٤٥}$ هي: $\dfrac{٢٩}{٤٩}$

$= جتا^{-١}\dfrac{\sqrt{٢٩}}{٧}$

$\therefore$ ك = ٧

مثـــال ١٠

يمثّل الشكل المقابل منطقة مثلثية مستوية ط ل س.



إذا علمت أن رؤوس المثلث هي: ط (٢، ٢، ٢)، ل (٥، ٦، ٧)، س (−٤، ٥، ٦)، فأوجد كلًا مما يأتي:

أ طول كل ضلع من أضلاع المثلث ط ل س.

ب ن (طَ̂) مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية.

ج مساحة المثلث ط ل س مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

الحـــلّ:

أ $ل س = \sqrt{(-٤ - ٥)^{٢} + (٥ - ٦)^{٢} + (٦ - ٧)^{٢}}$ ... استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء مع إيجاد الفرق بين إحداثيات س، ص، ع لكل زوج من النقاط.

$= \sqrt{(-٩)^{٢} + (-١)^{٢} + (-١)^{٢}}$

$= \sqrt{٨٣}$ وحدة.

$ط س = \sqrt{(-٤ - ٢)^{٢} + (٥ - ٢)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$

$= \sqrt{(-٦)^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢}}$

$= \sqrt{٦١}$ وحدة.

$ط ل = \sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢} + (٧ - ٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢} + ٥^{٢}}$

$= \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة.

ب $\text{جتا}\ (\hat{ط}) = \frac{(ط\ س)^٢ + (ط\ ل)^٢ - (ل\ س)^٢}{٢ \times ط\ س \times ط\ ل}$

$= \frac{٦١ + ٥٠ - ٨٣}{٢ \times \sqrt{٦١} \times \sqrt{٥٠}}$

$= \frac{١٤}{٥\sqrt{١٢٢}}$

بما أن أطوال أضلاع المثلث معلومة، لذا يمكن استخدام قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزوايا.

لاحظ أن $(ل\ س)^٢ = ٨٣$، $(ط\ س)^٢ = ٦١$، $(ط\ ل)^٢ = ٥٠$

$ق\ (\hat{ط}) = \text{جتا}^{-١} \left(\frac{١٤}{٥\sqrt{١٢٢}}\right)$

$= ٧٥{,}٣°$

استخدم معكوس دالة جيب التمام لتجد ق $(\hat{ط})$.

ج مساحة المثلث ط ل س $= \frac{١}{٢} \times ط\ س \times ط\ ل \times \text{جا}\ (\hat{ط})$

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٦١} \times \sqrt{٥٠} \times \text{جا}\ (٧٥{,}٣°)$

$= ٢٦{,}٧١$ وحدة مربعة.

مُساعَدة

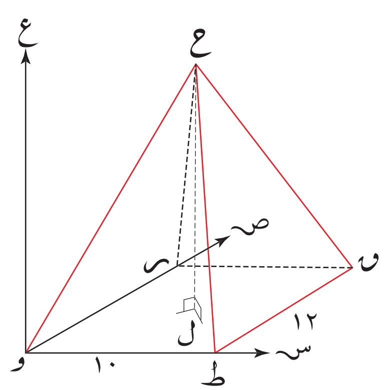
مساحة المثلث أ ب ج

$= \frac{١}{٢}$ أَ بَ جا ج.

تمارين ١١-٣

١) الهرم و ط ق س ع قائم قاعدته مستطيلة الشكل، حيث و (٠، ٠، ٠)، و ط = ١٠ وحدات، ط ق = ١٢ وحدة.

ع ل عمودي على القاعدة عند ل حيث ل مركز القاعدة.



أ إذا علمت أن حجم الهرم ٦٥٦ وحدة مكعبة، فبيّن أن ع ل = ١٦,٤ وحدة.

(حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع)

ب أوجد إحداثيات كل من:

١) ع

٢) نقطة منتصف $\overline{و\ ع}$

٣) نقطة منتصف $\overline{ق\ ع}$

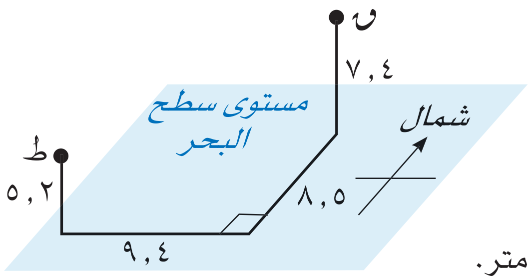
٤) نقطة منتصف $\overline{ع\ ط}$

ج أوجِد قيمة العدد الصحيح ك، إذا علمت أن طول المسافة من ق إلى نقطة منتصف $\overline{و\ ع}$ يساوي $\frac{ك}{١٠}$ وحدة.

د إذا علمت أن قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{و\ ع}$، $\overline{ع\ ل}$ يساوي $\text{جا}^{-١} \frac{\sqrt{٦١}}{\sqrt{أ}}$، فأوجِد قيمة أ.

٢) ترتفع قمّتا جبل ط، ن عن سطح البحر ٥,٢ كم، ٧,٤ كم على الترتيب.

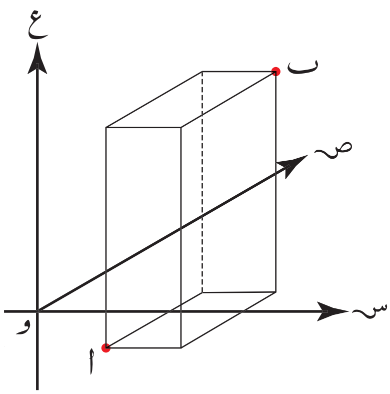
تقع القمّة ط على بُعد ٨,٥ كم جنوب القمّة ن، و ٩,٤ كم غرب القمّة ق أيضًا.



- **أ** احسب طول المسافة بين القمّتَين مقربة إلى أقرب ١٠٠ متر.
- **ب** احسب قياس زاوية الانخفاض من القمة ن إلى القمة ط مقربة إلى أقرب منزلة عشرية.

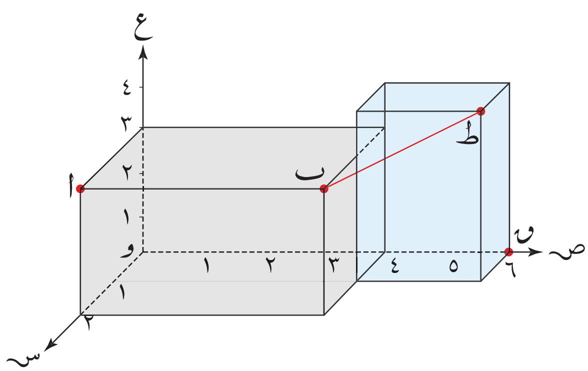
٣) طول أكبر قطر في متوازي المستطيلات المقابل = $\frac{٣٥}{٢}$ وحدة.

إذا علمت أن إحداثيات أ (٢، ٣، −٤)، ب (٢ + ك، $\frac{١١}{٢}$ + ك، ٣ك − ٤):



- **أ** بيّن أن ١١ك^{٢} + ٥ ك − ٣٠٠ = ٠
- **ب** أوجِد الجذر الموجب للمعادلة ١١ك^{٢} + ٥ ك − ٣٠٠ = ٠، ثم أوجِد إحداثيات نقطة منتصف أكبر قطر في متوازي المستطيلات.

٤) يبيّن الشكل المقابل متوازيَي مستطيلات فيهما وجهان متلامسان. تم تسمية الرؤوس الأربعة أ، ب، ط، ن.



- **أ** أوجد قياس الزاوية بين المستقيم و أ والجزء الموجب من المحور ع.
- **ب** أوجد قياس الزاوية بين المستقيم و ب، والمستوى س ص.
- **ج** احسب:
  ١) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{ب ط}$،
  ٢) طول $\overline{ب ط}$.
- **د** أوجد ن ($\widehat{ط و ن}$)، ثم احسب مساحة المثلث ط و ن (مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتين عشريتين).

٥) إذا علمت أن رؤوس المثلث ط هـ ر هي: ط (٠، ٤، ٢)، هـ (٦، −١، ٠)، ر (−٢، −١، ٤)، وأطوال أضلاع المثلث ط هـ ر بترتيب تنازلي هي: $\sqrt{أ}$، $\sqrt{ب}$، $\sqrt{ج}$ وحدة.

- **أ** أوجِد قيم أ، ب، ج، ثم استخدمها لتوضح أن المثلث ط هـ ر ليس قائم الزاوية.
- **ب** أوجِد أيّ زاوية من زوايا المثلث الثلاث الداخلية، ثم احسب مساحة المثلث ط هـ ر مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

رابط الكتروني

قد ترغب في حل بعض المسائل الهندسية مثل The spider and the fly في الموقع Underground Mathematics حول التفكير في الهندسة الجزء الأول من The spider and the fly

١١-٤ المسلّمات والنظريات

المسلّمة Axiom هي عبارة اتُّفق على صحّتها، دون الحاجة الى برهنتها أو إثباتها. تُعدّ المسلّمات هي الحقائق الأساسية في كثير من المبرهنات أو القوانين الرياضية.

وبصورة عامة فللمسلّمات سمات، وهي:

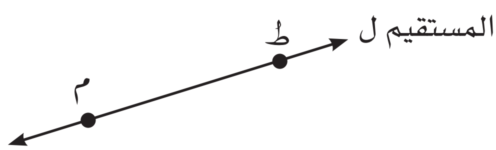
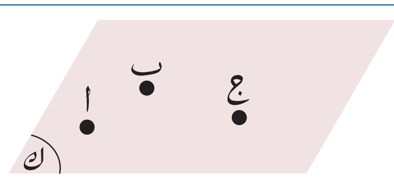
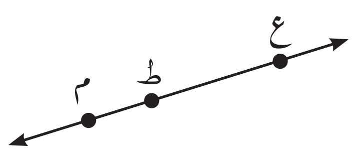
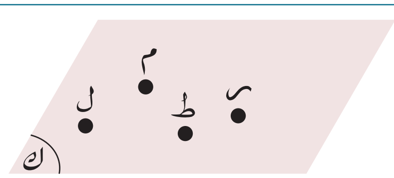
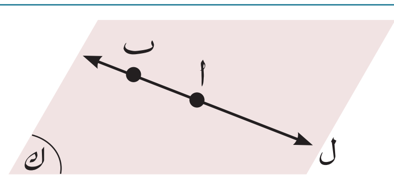
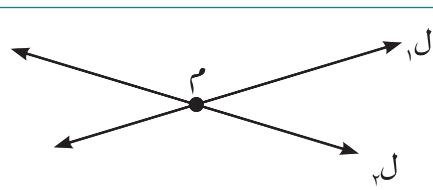
- واضحة وسهلة الفهم.
- لا تحتوي على كلمات كثيرة تحتاج إلى توضيح.
- تتوافق المسلّمات بعضها مع بعض بحيث لا تتناقض فيما بينها.
- صحيحة عند استخدامها منفردة، بمعنى يمكن استخدامها بصورة مستقلة.

من الأمثلة على المسلّمات:

أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.

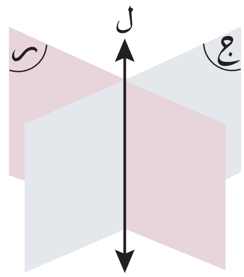
تم إثبات خطأ بعض المسلّمات بعد أن قُبلت لزمن طويل، مثل مسلّمة أن الذرات غير قابلة للتجزئة.

المسلّمات الهندسية السبع

نص المسلّمة	الشكل التوضيحي
١) أي نقطتين يمر بهما مستقيم وحيد.	
٢) أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.	
٣) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.	
٤) كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.	
٥) إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في المستوى.	
٦) إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.	

هل تعلم؟

استخدام المسلّمة، وما يشابهها مكّن أقليدس (٣٢٥ – ٢٦٥ قبل الميلاد) على تشكيل فهم جديد للهندسة على مستوى العالم. في بعض الأحيان تكون المسلّمات غير واضحة، ولكنها مطلوبة لنتيجتها. وخير دليل على ذلك مسلّمة أينشتاين القائلة بتساوي الكون في كل مكان – أي العالم متجانس – هذه الفئة من المسلّمات ضرورية لجعل بعض النتائج العلمية ممكنة، ولكن قد تتحوّل إلى معضلة لأنها ليست واضحة.

نص المسلّمة	الشكل التوضيحي
٧) إذا تقاطع مستويان، فإنهما يتقاطعان في مستقيم.	

النظرية theorem هي: فكرة في الرياضيات يمكن إثباتها. يتم إثبات النظريات باستخدام المنطق والمسلّمات والنظريات الأخرى التي تم إثباتها بالفعل.

قد يكون من السهل ذكر النظرية، ولكن من الصعب إثباتها.

وخير مثال على ذلك هو نظرية فيرما الأخيرة، والتي تم ذكرها لأول مرة في عام ١٦٣٧م:

لا توجد ثلاثة أعداد صحيحة موجبة أ، ب، ج، تحقق المعادلة $أ^{ن} + ب^{ن} = ج^{ن}$ لأي قيمة صحيحة لـ ن أكبر من ٢

هذه النظرية برهنها العالم أندرو وايلز بعد ٣٥٧ عامًا، وقد استغرق في برهانها ١٥٠ صفحة.

مُساعَدة

النظرية ليست هي نفسها الجانب النظري theory؛ الجانب النظري هو نظام من الأفكار يهدف إلى شرح شيء ما مثل حدث أو ظاهرة.

ثلاث نظريات هندسية مع براهينها

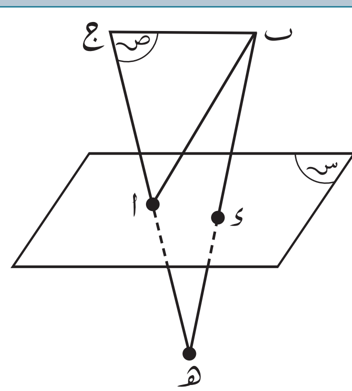
النظرية ١: إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.

النظرية ٢: يشكّل مستقيم معلوم، ونقطة خارجة عنه مستوى وحيد.

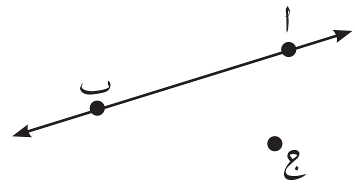
النظرية ٣: المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيد.

فيما يلي براهين للنظريات الثلاث:

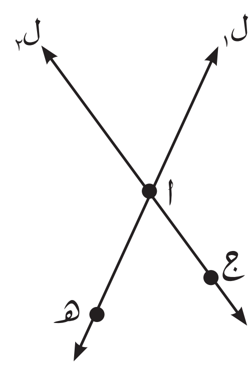
النظرية ١: إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.

شرح النظرية	شكل توضيحي	البرهان
المعطى: النقطة ا مشتركة بين المستوى س والمستوى ص. المطلوب: برهان أن المستويين يشتركان في مستقيم. الإجراءات: مدّ المستقيم ا ع إلى الجهة الأخرى من المستوى س		المستقيم ا ع ⊃ المستوى ص، ∴ هـ ∋ ص. (من تعريف المستوى) ب ∋ ص و هـ ∋ ص، ∴ ب هـ ⊃ المستوى ص. (من تعريف المستوى). لكن النقطتين ب، هـ تقعان على جهتين مختلفتين من المستوى س. ∴ المستقيم ب هـ يقطع المستوى س في النقطة ء. ∴ النقطتان ا، ء ∋ س، ا، ء ∋ ص. ∴ يقع المستقيم اء في كلا المستويين س، ص.

النظرية ٢: يشكّل مستقيم معلوم، ونقطة خارجة عنه مستوى وحيد.

شرح النظرية	شكل توضيحي	البرهان
المعطى: مستقيم يمرّ بالنقطتَين ا، ب، والنقطة ج لا تقع على استقامة واحدة مع ا، ب. المطلوب: برهان أن هناك مستوى وحيد، يحوي هذا المستقيم والنقطة ج.		نلاحظ أن النقطة ا ∋ المستقيم ا ب، النقطة ب ∋ المستقيم ا ب، ولكن النقطة ج ∌ المستقيم ا ب، ∴ لا تقع النقاط ا، ب، ج على استقامة واحدة. ∴ النقاط ا، ب، ج تشكل مستوى وحيد.

النظرية ٣: المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيد.

شرح النظرية	شكل توضيحي	البرهان
المعطى: يحوي المستقيم ل$_1$ النقطتَين ا، هـ، ويحوي المستقيم ل$_2$ النقطتَين ا، ج. المطلوب: برهان وجود مستوى وحيد يحوي ل$_1$، ل$_2$.		النقطتان ا، هـ ∋ المستقيم ل$_1$. النقطتان ا، ج ∋ المستقيم ل$_2$. ∴ لا تقع النقاط ا، ج، هـ على استقامة واحدة. ∴ تشكل النقاط ا، ج، هـ مستوى وحيد.

استكشف ٤

ناقش العبارة 'يمكن احتواء أي مستقيمين في مستوى وحيد'.
هناك ثلاث حالات يجب أخذها في الاعتبار عند التفكير في مستقيمَين في الفضاء:

١) قد يكونان متقاطعَين،
٢) قد يكونان متوازيين،
٣) قد يكونان غير متقاطعَين وغير متوازيَين "متخالفان".

مثـــال ١١

اشرح بأسلوبك الخاص، كيف تعرف أن العبارة الآتية خاطئة عندما ن = ٣:

يحدد الحجم أو الفضاء بـ ن نقطة على الأقل

الحــلّ:

تعني عبارة 'على الأقل ٣ نقاط' ثلاثة نقاط أو أكثر.

لشرح أن العبارة المعطاة خاطئة، نحن بحاجة إلى أن نبرهن أن العبارة 'يحدد الفضاء بـ ٣ نقاط' هي عبارة خاطئة.

هناك حالتان مختلفتان يجب الالتفات إليهما بالنسبة إلى النقاط الثلاث:

الحالة ١: تقع النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

إذا وقعت ٣ نقاط على استقامة واحدة، فإنها تقع على مستقيم وحيد.

المستقيم هو شكل لديه بُعد واحد، وليس له حجم.

الحالة ٢: لا تقع النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

أيّ ٣ نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمرّ بها مستوى وحيد.

المستوى هو شكل لديه بُعدان، وليس له حجم.

خلاصة

العبارة 'يحدد الحجم أو الفضاء بـ ن نقطة على الأقل' خاطئة عندما ن = ٣

تمارين ١١-٤

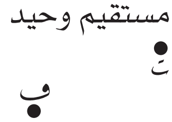
١) اقرأ بعناية العبارات المرافقة لكل من الرسوم الثمانية الآتية.

بعض هذه العبارات يمكن إثباتها وبعضها الآخر لا يمكن ذلك، لكنها جميعها عبارات صحيحة.

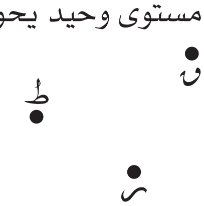
باستخدام أسلوبك الخاص، اشرح بإيجاز كيف تعرف أن كلًا من هذه العبارات صحيحة.

يمكنك استخدام أي من المسلّمات أو النظريات في التفسيرات الخاصة بك، ولكن لا تقم بنسخها حرفيًا:

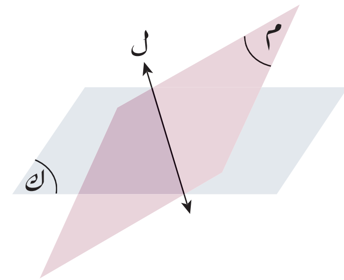
أ) مستقيم وحيد يحوي النقطتَين ف، ت



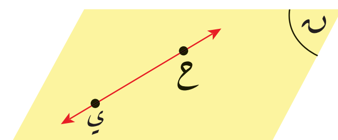
ب) مستوى وحيد يحوي النقاط الثلاث ط، ر، ن



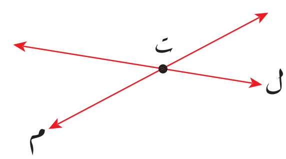
ج يتقاطع المستويان ك، م في المستقيم ل.



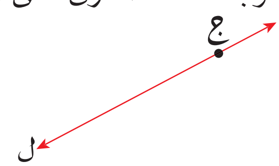
د المستقيم يِ ع يقع في المستوى ن.



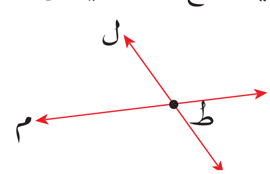
هـ مستوى وحيد يحوي المستقيمَين ل، م المتقاطعَين في النقطة تَ.



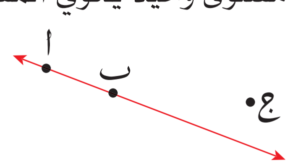
و توجد نقطة أخرى على المستقيم ل بجانب النقطة ع.



ز يتقاطع المستقيمان ل، م في النقطة ط.

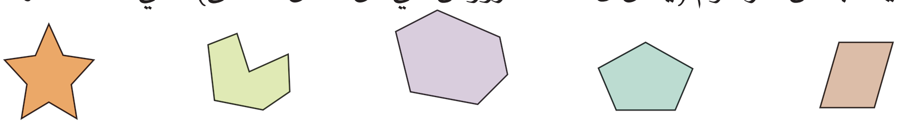


ح مستوى وحيد يحوي المستقيم أ ب، والنقطة ع.



٢) قرأ يونس العبارة الآتية:
يحدد الحجم أو الفضاء بـ ن نقطة على الأقل.

أ يدّعي يونس أنه لا توجد قيمة لـ **ن** تكون عندها العبارة صحيحة.
إليك بعض الرسوم (يمثل ن عدد الرؤوس في كل شكل معطى) التي استخدمها كأدلة لتبرير ادعائه.

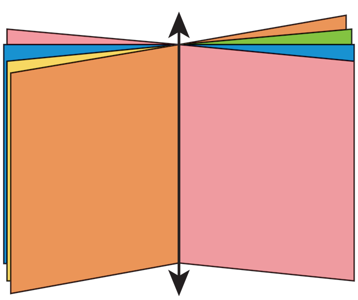


ن = ٤	ن = ٥	ن = ٦	ن = ٧	ن = ١٠
ليس له حجم	ليس له حجم	ليس له حجم	ليس له حجم	ليس له حجم

ما رأيك في أدلة يونس؟
ماذا تقترح عليه؟

ب توجد قيمة واحدة لـ **ن** لتكون العبارة صحيحة:
١) ما هذه القيمة؟
٢) على مستوى إحداثي ثلاثي الأبعاد: حدّد نقاطًا، وارسم شكلًا له حجم لتدعم إجابتك للجزئية (١).

٣) من خلال الشكل الآتي، أعط مبررات تدعم العبارة الآتية:
'يوجد عدد لا نهائي من المستويات تمر بنقطتَين'.



٤) اكتب إحداثيات أي ثلاث نقاط تقع في المستوى الذي يحوي المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ط (٤، ٠، ٥) ، ق (−٢، ٠، ٥)، ويحوي أيضًا النقطة س (٧، ٠، −٣).

٥) أعط مثالًا من واقع الحياة اليومية لموقف يدعم العبارتَين الآتيتَين:

١) 'يحوي المستوى ثلاث نقاط مختلفة على الأقل ليست على استقامة واحدة'.
٢) 'إذا وقعت نقطة خارج المستقيم، فإنه يوجد مستوى وحيد يحوي المستقيم والنقطة'.

يمكنك استخدام الرسوم التي تساعدك على تفسير الموقف أو المواقف التي اخترتها.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

نقطة المنتصف

نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات نهايتَيها هما (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)، (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) هي: $\left(\frac{س_1 + س_2}{2}، \frac{ص_1 + ص_2}{2}، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$.

المسافة بين نقطتَين

طول أكبر قطر في متوازي مستطيلات أبعاده أ، ب، ج وحدة = $\sqrt{أ^2 + ب^2 + ج^2}$.

للقطعة المستقيمة الواصلة بين ا (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)، ب (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$)، والتي نقطة منتصفها م يكون:

- ا ب = $\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$
- ا م = م ب = $\frac{1}{2}$ ا ب = $\frac{1}{2}\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$

المسلّمات الهندسية السبع

١) أي نقطتين يمر بهما مستقيم وحيد.

٢) أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.

٣) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

٤) كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

٥) إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد الذي يمرّ بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.

٦) إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

٧) إذا تقاطع مستويان، فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

ثلاث نظريات هندسية

النظرية ١: إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.

النظرية ٢: يشكّل مستقيم معلوم، ونقطة خارجة عنه مستوى وحيد.

النظرية ٣: المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيد.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الحادية عشرة

١) أوجِد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين أزواج النقاط الآتية:

أ (٠، ٠، ٠) ، (٧، ٠، ٠)

ب (١، ٢، ٣) ، (١، ٥، ٣)

ج (−٢، ٥، ١١) ، (−٢، ٥، ٢)

٢) أوجِد طول المسافة بين أزواج النقاط الآتية مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ (١، ٢، ٣) ، (٢، ٣، ٤)

ب (٥، ١، ٠) ، (٧، ٤، −١)

ج (٨، −٤، −٧) ، (١، ٥، ٦)

٣) متوازي مستطيلات أبعاده ٥,٦ سم، ٦,٦ سم، ٤,٢ سم.

أوجِد طول أكبر قطر فيه مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٤) إحداثيات رؤوس قاعدة هرم قائم هي: ا(٠، ٠، ٠)، ب(٦، ٠، ٠)، ج(٦، ٠، ٤)، ى(٠، ٠، ٤).

أ ما شكل قاعدة الهرم؟

ب أوجِد المسافة بين كل رأس من رؤوس القاعدة مع رأس الهرم هـ (٣، ٨، ٢).

٥) ورشة صيانة طائرات على شكل متوازي مستطيلات. أبعاده: الطول ٤٠ مترًا، العرض ١٢٠مترًا، والارتفاع ١٦ مترًا.

أ أحسب الفرق بين طول القطر الأكبر وعرض الورشة بالأمتار مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب قُسّمت الورشة إلى ٢٠ منطقة عمل متطابقة، أبعاد كل منطقة: الطول رُبع طول الورشة، والعرض خُمس عرض الورشة، والارتفاع هو ارتفاع الورشة نفسه. أوجِد في أبسط صورة طول أكبر قطر لكل منطقة عمل.

٦) أيّ مسلّمة هندسية أو نظرية يمكن تدعيمها عند مشاهدة عشر كرات قدم في أرضية ملعب منبسط؟

٧) أيّ مسلّمة هندسية أو نظرية يمكن تدعيمها عند مشاهدة شرطي سير ينظّم حركة السير عند تقاطع طريقَين مستقيمَين؟

٨) اذكر فرقًا واحدًا بين النقطة والمستقيم.

٩) اذكر تشابهًا واحدًا بين المستقيم والمستوى.

١٠) إحداثيات رؤوس مثلث هي: ع (٤، ٠، ٠)، ں (٠، ٤، ٠)، ل (٠، ٠، ٨).

أ على نظام ثلاثي الأبعاد، ارسم شكلًا يمثل المثلث، وسمّه.

ب بيّن أن المثلث ع ں ل متطابق الضلعَين.

ج احسب مساحة المثلث ع ں ل.

١١) رُسِم مربع في المستوى ص ع حيث ط (٠، ٣، ٤) مركز المربع، وكانت إحداثيات رؤوس المربع أعدادًا صحيحة، ويبعد كل منها عن ط مقدار ٥ وحدات.

أ كم مربعًا مختلفًا يمكنك أن ترسم؟

ب اكتب إحداثيات الرؤوس الأربعة لكل من هذه المربعات.

مصطلحات علمية

أ

إسقاط project: الإلقاء أو النقل على سطح مستوٍ. (ص ١٣٧)

ب

البُعد dimension: مقدار قابل للقياس، ويمتد في اتجاه واحد. (ص ١٣٢)

ت

التباديل arrangements/permutations: طريقة لاختيار العناصر وترتيبها في ترتيب معيّن. (ص ٥٦)

التوافيق combinations: طريقة لاختيار العناصر دون الأخذ بعين الاعتبار ترتيبها. (ص ٥٦)

التوزيع الاحتمالي probability distribution: عرض جميع قيم المتغير العشوائي الممكنة مع الاحتمالات المناظرة لها. (ص ٩٥)

التوزيع الهندسي geometric distribution: توزيع احتمالي منفصل للعدد الممكن من النواتج ولتمثيل عدد من التجارب حتى حدوث أول نجاح لعدد غير منتهٍ من التجارب المستقلة، حيث يكون احتمال النجاح في كل تجربة هو نفسه. (ص ١٠٨)

توزيع ذي الحدَّين binomial distribution: توزيع احتمالي منفصل للعدد الممكن من النواتج الناجحة في عدد محدود من التجارب المستقلة، حيث يكون احتمال النجاح في كل تجربة هو نفسه. (ص ١٠٨)

التوقع expectation: التوقع للمتغير العشوائي المنفصل هو ت(س) = Σ س × ل(س). (ص ١٠٠)

د

الدالة الأُسّية الطبيعية natural exponential function: الدالة ص = هـ^{س}. (ص ٤٤)

دالة الصحيح floor function: صحيح العدد هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي العدد. (ص ٢٩)

ذ

ذات الحدَّين binomial: كثيرة حدود تتضمن حدَّين فقط. (ص ١٣٨)

ر

الرأس vertex: نقطة تقاطع مستقيمَين أو أكثر. (ص ١٣٣)

ع

على استقامة واحدة collinear: وصف لنقاط تقع على المستقيم نفسه. (ص ١٣٣)

ق

القطعة المستقيمة line segment: هي جزء متصل من مستقيم لها نقطتا بداية ونهاية. (ص ١٣٣)

القيمة المطلقة absolute value/modulus: القيمة المطلقة للعدد هي المسافة بينه وبين الصفر على خط الأعداد، أو مقدار العدد دون إشارة مرفقة به. (ص ٢٠)

ل

لوغاريتم logarithm: القوة التي يجب أن يتم رفع الأساس لتحقيق قيمة معيّنة؛ وغالبًا ما يرمز إليها بالرمز لـو. (ص ٣٤)

اللوغاريتم الطبيعي natural logarithm: اللوغاريتم للأساس هـ. يرمز إليه بالرمز لـوهـ أو لط. (ص ٤٤)

م

مثلث باسكال Pascal's triangle: مصفوفة مثلثة من المعاملات ذات الحدَّين، حيث يبدأ كل صف بالعدد ١ وينتهي به، وكل عدد هو مجموع العددَين من الصف الذي فوقه مباشرة. (ص ٧٦)

المتغير العشوائي المنفصل discrete random variable: تكون النواتج قيمًا منفصلة، وغالبًا ما تكون أعدادًا صحيحة. (ص ٩٥)

المسافة بين نقطة ومستقيم distance between a point and a line: أقصر مسافة يتم قياسها بين النقطة والمستقيم. (ص ١٤٤)

المسافة بين نقطة ومستوى distance from a point to a plane: طول العمود النازل من النقطة إلى المستوى. (ص ١٤٤)

المسافة بين نقطتَين distance between two points: أقصر بُعد بين نقطتَين على مستقيم. (ص ١٤٤)

المستقيم line: شكل متصل في بُعد واحد له طول وليس له عرض. (ص ١٣٢)

المستوى plane: هو شكل مسطح ثنائي الأبعاد يمتد في كلتا الجهتَين إلى مالانهاية. (ص ١٣٣)

المستوى س ص xy–plane: المستوى الذي يتضمن جميع النقاط التي يكون الإحداثي ع لها صفرًا. (ص ١٣٧)

المستوى س ع xz–plane: المستوى الذي يتضمن جميع النقاط التي يكون الإحداثي الصادي لها صفرًا. (ص ١٣٧)

المستوى ص ع xz–plane: المستوى الذي يتضمن جميع النقاط التي يكون الإحداثي السيني لها صفرًا. (ص ١٣٨)

المسلّمة postulate: عبارة اتُّفق على صحّتها، دون الحاجة إلى برهنتها أو إثباتها. (ص ١٥٨)

مضروب العدد factorial: ناتج ضرب كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي العدد المعطى. (ص ٥٨)

معاملات حدود ذات الحدَّين binomial coefficient: المعاملات في مفكوك ذات الحدَّين. (ص ٧٩)

ن

النظرية theorem: فكرة في الرياضيات يمكن إثباتها. (ص ١٥٩)

نظرية ذات الحدَّين binomial theorem: قاعدة تستخدم لإيجاد مفكوك $(ا + س)^{ن}$ أو $(أ + ب)^{ن}$. (ص ٨٠)

النقطة point: موقع محدد في الفضاء. ليس لها أبعاد ولا يمكن تقسيمها. (ص ١٣٢)

نقطة الرأس apex: أعلى نقطة؛ الرأس الأبعد عن القاعدة. (ص ١٤٤)

نقطة المنتصف mi–point: النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين نقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة. (ص ١٤٤)

النموذج الرياضي mathematical model: وصف لنظام باستخدام المفاهيم واللغة الرياضية. (ص ١٠٨)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Juergen Hasenkopf/Alamy Stock Photo; Gopinath Duraisamy/EyeEm/Getty Images; Gustavo Miranda Holley/Getty images; Getty Images; Frank Fell/robertharding/Getty Images; Ann Monn/Getty Images

تم بحمد الله

رقم الإيداع:
٦٨٢٤ / ٢٠٢٣م

مزون للطباعة والنشر والتغليف (ش.م.م) - ٢٤٨١٥٦٩٣

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر أيضًا:

– كتاب النشاط.

– دليل المعلّم.

ISBN 978-9-99698-906-3

9 789996 989063 >

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om